Analytische Geometrie

(BOS 12. Jahrgangsstufe)

Stand: 6. Juni 2003

Kontakt und weitere Infos:
www.barmetler.de

Inhaltsverzeichnis

1 Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Um das Verfahren an sich näher zu bringen werden zuerst zwei allgemeine Beispiele mit je drei Gleichungen und drei Unbekannten betrachtet. Das soll den Schülern erlauben, sich ganz auf die neue Methodik zu konzentrieren, und nicht immer die Vorstellung der Vektoren im Hinterkopf zu haben.

Beispiel 1: Das Zahlendreieck

Es wird zunächst die Aufgabe aus Abbildung 1 gestellt. Dabei gilt es drei Zahlen a, b, c so zu finden, dass jeweils die zwei an eine Winkelhalbierende grenzenden Werte die Summe außen bilden (z.B. $a + b = 8$).

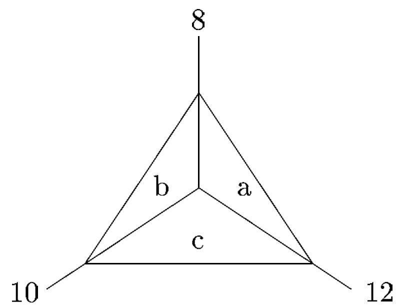

Abbildung 1: Das Zahlendreieck

Die Schüler sollen die beschreibenden Gleichungen aufstellen:

$$\begin{array}{ccccccc} a & + & b & & & = & 8 \\ & & b & + & c & = & 10 \\ a & + & & & c & = & 12 \end{array} \tag{1}$$

Dieses *inhomogene Gleichungssystem* (da rechte Seite nicht nur aus Nullen besteht) soll in die *Diagonalform* gebracht werden.

$$\begin{array}{ccccccc} 1a & + & 0b & + & 0c & = & \dots \\ 0a & + & 1b & + & 0c & = & \dots \\ 0a & + & 0b & + & 1c & = & \dots \end{array} \tag{2}$$

Dazu sind folgende Rechenoperationen erlaubt:

- Vertauschung zweier Zeilen
- Addition eines geeigneten Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile
- Multiplikation einer (kompletten) Zeile mit einer von Null verschiedenen Zahl

Daraus ergibt sich folgender Rechenweg:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 1 & + & 0 & = & 8 \\ 0 & + & 1 & + & 1 & = & 10 \\ 1 & + & 0 & + & 1 & = & 12 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} 1 & + & 1 & + & 0 & = & 8 \\ 0 & + & 1 & + & 1 & = & 10 \\ 0 & - & 1 & + & 1 & = & 4 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 0 & - & 1 & = & -2 \\ 0 & + & 1 & + & 1 & = & 10 \\ 0 & + & 0 & + & 2 & = & 14 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} 1 & + & 0 & - & 1 & = & -2 \\ 0 & + & 1 & + & 1 & = & 10 \\ 0 & + & 0 & + & 1 & = & 7 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 0 & + & 0 & = & 5 \\ 0 & + & 1 & + & 0 & = & 3 \\ 0 & + & 0 & + & 1 & = & 7 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=5 \\ b=3 \\ c=7 \end{array} \right.$$

Probe durch Einsetzen durchführen!

Beispiel 2: Die Zahlenmauer

Das Verfahren soll an einem zweiten Beispiel weiter vertieft werden:

Die Summe der Zahlen in zwei nebeneinander liegenden Ziegelsteinen soll stets im Stein darüber stehen (vgl. Abbildung 2).

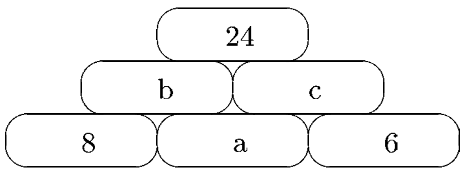

Abbildung 2: Die Zahlenmauer

Erneut sollen die Schüler das zugehörige *inhomogene Gleichungssystem* aufstellen, und diesmal auch an der Lösungsfindung verstärkt mitarbeiten. Zunächst ergibt sich das (3,3)-System:

$$\begin{array}{ccccccc} a & - & b & & & = & -8 \\ a & & & - & c & = & -6 \\ & & b & + & c & = & 24 \end{array} \tag{3}$$

Es ergibt sich folgender Rechenweg:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & - & 1 & + & 0 & = & -8 \\ 1 & + & 0 & - & 1 & = & -6 \\ 0 & + & 1 & + & 1 & = & 24 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} 1 & - & 1 & + & 0 & = & -8 \\ 0 & + & 1 & - & 1 & = & 2 \\ 0 & + & 1 & + & 1 & = & 24 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 0 & - & 1 & = & -6 \\ 0 & + & 1 & - & 1 & = & 2 \\ 0 & + & 0 & + & 2 & = & 22 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} 1 & + & 0 & + & 0 & = & 5 \\ 0 & + & 1 & + & 0 & = & 13 \\ 0 & + & 0 & + & 1 & = & 11 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=5 \\ b=13 \\ c=11 \end{array} \right.$$

Probe durch Einsetzen durchführen!