
Analytische Geometrie

(BOS 12. Jahrgangsstufe)

© 2003, Thomas Barmetler

Stand: 6. Juni 2003

**Kontakt und weitere Infos:
www.barmetler.de**

Inhaltsverzeichnis

1	Das Gaußsche Eliminationsverfahren	6
2	Punkte und Vektoren	8
2.1	Punktkoordinaten	8
2.2	Ortsvektor	9
2.3	Freie Vektoren	10
2.4	Anwendungsbeispiele	10
3	Das Skalarprodukt	12
3.1	Definition	12
3.2	Eigenschaften	13
3.3	Berechnung des Skalarproduktes	13
3.4	Beispiel	15
3.5	Anwendungen des Skalarproduktes	17
3.5.1	Betrag (Länge) eines Vektors	17
3.5.2	Winkel zwischen zwei Vektoren	18
3.5.3	Senkrechte Projektion eines Vektors auf einen anderen Vektor	19
3.5.4	Flächeninhalt eines Parallelogramms	21
4	Das Vektorprodukt	22
4.1	Definition	22
4.2	Eigenschaften	24
4.3	Berechnung des Vektorproduktes	25
4.4	Anwendungen des Vektorproduktes	28
4.4.1	Flächeninhalt eines Parallelogramms	28
4.4.2	Flächeninhalt eines Dreiecks	28
4.4.3	Volumen eines Spats	31
4.4.4	(HESSEsche) Normalenform einer Ebene	33
4.4.5	Abstand eines Punktes von einer Geraden im \mathbf{R}^2	35
4.4.6	Abstand eines Punktes von einer Geraden im \mathbf{R}^3	37
4.4.7	Abstand eines Punktes von einer Ebene	39
4.4.8	Abstand zweier paralleler Geraden	41

4.4.9	Abstand zweier windschiefer Geraden	42
4.4.10	Abstand zweier Ebenen	46
4.4.11	Spiegelung eines Punktes	47
4.4.12	Winkel zwischen zwei Geraden	49
4.4.13	Winkel zwischen Gerade und Ebene	51
4.4.14	Winkel zwischen zwei Ebenen	52
5	Die lineare (Un)Abhängigkeit von Vektoren	54
5.1	Zwei Vektoren	54
5.2	Drei Vektoren	54
5.2.1	Lösung mittels Determinante	54
5.2.2	Lösung mittels Gaußschem Eliminationsverfahren	54
5.2.3	Übungsaufgaben	57
6	Darstellungsformen von Geradengleichungen	58
6.1	Parametergleichung einer Geraden	58
6.2	Normalenform einer Geraden	59
6.3	Gerade in Achsenabschnittsform	60
6.3.1	Beispiele für Geraden in Achsenabschnittsform	61
7	Darstellungsformen von Ebenengleichungen	63
7.1	Ebene in Punkt-Richtungs-Form	63
7.2	Ebene in Drei-Punkte-Form	64
7.3	Ebene durch zwei sich schneidende Geraden	66
7.4	Ebene durch einen Punkt und eine Gerade	67
7.5	Ebene durch zwei parallele Geraden	69
7.6	Übungsaufgaben	71
7.7	Ebenen in parameterfreier Darstellung (Normalenform)	72
7.7.1	Beispiele für besondere Lagen von Ebenen in parameter- freier Darstellung	73
7.8	Ebene in Achsenabschnittsform	75
7.8.1	Beispiele für Ebenen in Achsenabschnittsform	76
8	Lagebeziehung zwischen Punkt und Gerade	80
8.1	Beispiele für die Lagebeziehung von Punkt zu Gerade	80

9 Lagebeziehung zwischen zwei Geraden	82
9.1 Mögliche Lagebeziehungen	82
9.2 Untersuchung der Lagebeziehungen	82
9.2.1 Lösungsstrategie für Geradengleichungen mit Parametern	90
9.2.2 Lösungsstrategie für Geradengleichungen ohne Parametern	93
9.3 Übungsaufgaben	95
10 Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene	96
10.1 Lösungsstrategie für Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen in parameterfreier Darstellung	102
10.2 Beispiele zur Lagebeziehung einer Gerade zu einer Ebene in parameterfreier Darstellung	102
11 Lagebeziehung zwischen zwei Ebenen	105
11.1 Mögliche Lagebeziehungen	105
11.2 Lösungsstrategie für Ebenen in Parameterdarstellung	105
11.3 Lösungsstrategie für Ebenen in parameterfreier Darstellung	106
11.3.1 Beispiele zur Lagebeziehung zweier Ebenen in parameterfreier Darstellung	107
11.4 Lösungsstrategie für eine Ebene in Parameterdarstellung, eine in parameterfreier Darstellung	110
11.4.1 Beispiele für eine Ebene in Parameterdarstellung, eine in parameterfreier Darstellung	111
11.5 Übungsaufgaben	113
12 Übungsstunde Lagebeziehungen	114
12.1 Überblick	114
12.1.1 Bekannte Elemente und ihre Darstellungsformen	114
12.1.2 Mögliche Lagebeziehungen	114
12.1.3 Wiederholung	114
12.2 Übungsaufgaben	115
13 Spurpunkte und Spurgeraden	128
13.1 Spurpunkte einer Geraden	128
13.1.1 Berechnung der Spurpunkte	129
13.2 Spurgeraden einer Ebene	133

13.2.1	Berechnung der Spurgeraden über den Schnitt zweier Ebenen	134
13.2.2	Berechnung der Spurgeraden über die Achsenabschnittspunkte	140

1 Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Um das Verfahren an sich näher zu bringen werden zuerst zwei allgemeine Beispiele mit je drei Gleichungen und drei Unbekannten betrachtet. Das soll den Schülern erlauben, sich ganz auf die neue Methodik zu konzentrieren, und nicht immer die Vorstellung der Vektoren im Hinterkopf zu haben.

Beispiel 1: Das Zahlendreieck

Es wird zunächst die Aufgabe aus Abbildung 1 gestellt. Dabei gilt es drei Zahlen a, b, c so zu finden, dass jeweils die zwei an eine Winkelhalbierende grenzenden Werte die Summe außen bilden (z.B. $a + b = 8$).

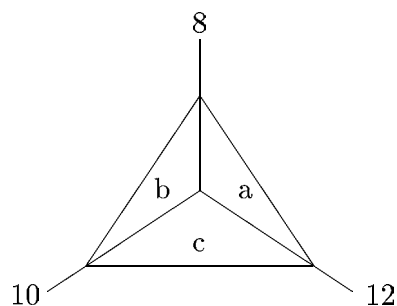


Abbildung 1: Das Zahlendreieck

Die Schüler sollen die beschreibenden Gleichungen aufstellen:

$$\begin{array}{rcl} a + b & = & 8 \\ & b + c & = 10 \\ a + & c & = 12 \end{array} \quad (1)$$

Dieses *inhomogene Gleichungssystem* (da rechte Seite nicht nur aus Nullen besteht) soll in die *Diagonalform* gebracht werden.

$$\begin{array}{rcl} 1a + 0b + 0c & = & \dots \\ 0a + 1b + 0c & = & \dots \\ 0a + 0b + 1c & = & \dots \end{array} \quad (2)$$

Dazu sind folgende Rechenoperationen erlaubt:

- Vertauschung zweier Zeilen
- Addition eines geeigneten Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile
- Multiplikation einer (kompletten) Zeile mit einer von Null verschiedenen Zahl

Daraus ergibt sich folgender Rechenweg:

$$\begin{array}{rcl}
 1 + 1 + 0 = 8 & & 1 + 1 + 0 = 8 \\
 0 + 1 + 1 = 10 & \Rightarrow & 0 + 1 + 1 = 10 \Rightarrow \\
 1 + 0 + 1 = 12 & & 0 - 1 + 1 = 4 \\
 \\
 1 + 0 - 1 = -2 & & 1 + 0 - 1 = -2 \\
 0 + 1 + 1 = 10 & \Rightarrow & 0 + 1 + 1 = 10 \Rightarrow \\
 0 + 0 + 2 = 14 & & 0 + 0 + 1 = 7 \\
 \\
 1 + 0 + 0 = 5 & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} a=5 \\ b=3 \\ c=7 \end{array} \right. \\
 0 + 1 + 0 = 3 & & \\
 0 + 0 + 1 = 7 & &
 \end{array}$$

Probe durch Einsetzen durchführen!

Beispiel 2: Die Zahlenmauer

Das Verfahren soll an einem zweiten Beispiel weiter vertieft werden:

Die Summe der Zahlen in zwei nebeneinander liegenden Ziegelsteinen soll stets im Stein darüber stehen (vgl. Abbildung 2).

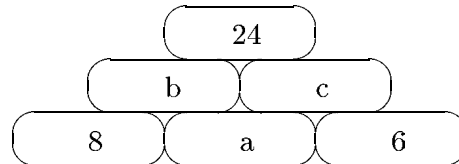


Abbildung 2: Die Zahlenmauer

Erneut sollen die Schüler das zugehörige *inhomogene Gleichungssystem* aufstellen, und diesmal auch an der Lösungsfindung verstärkt mitarbeiten. Zunächst ergibt sich das (3,3)-System:

$$\begin{array}{rcl}
 a - b & = & -8 \\
 a & - & c = -6 \\
 & b + c & = 24
 \end{array} \quad (3)$$

Es ergibt sich folgender Rechenweg:

$$\begin{array}{rcl}
 1 - 1 + 0 = -8 & & 1 - 1 + 0 = -8 \\
 1 + 0 - 1 = -6 & \Rightarrow & 0 + 1 - 1 = 2 \Rightarrow \\
 0 + 1 + 1 = 24 & & 0 + 1 + 1 = 24 \\
 \\
 1 + 0 - 1 = -6 & & 1 + 0 + 0 = 5 \\
 0 + 1 - 1 = 2 & \Rightarrow & 0 + 1 + 0 = 13 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=5 \\ b=13 \\ c=11 \end{array} \right. \\
 0 + 0 + 2 = 22 & & 0 + 0 + 1 = 11
 \end{array}$$

Probe durch Einsetzen durchführen!