2 Punkte und Vektoren

Da generell nur das kartesische Koordinatensystem betrachtet wird, beschränkt sich auch die folgende Einführung auf Punkte und Vektoren im kartesischen Koordinatensystem.

2.1 Punktkoordinaten

Vorgehen: Auf einen Tafelflügel wird an beliebiger Stelle ein Punkt A gezeichnet. Die Schüler werden gefragt wo dieser Punkt liegt. Im Dialog wird erarbeitet dass man für die Angabe der Lage des Punktes ein Bezugssystem (=Koordinatensystem) braucht.

→ Ein zweidimensionales Koordinatensystem (welches später zu einem dreidimensionalen erweitert wird) wird um den Punkt gezeichnet.

Erneut werden die Schüler aufgefordert die Position des Punktes zu beschreiben. Dabei werden die Begriffe Quadranten (und anschließend Oktanten) erläutert.

→ Anhand der Abbildungen 3 und 4 werden Quadranten und Oktanten grafisch veranschaulicht.

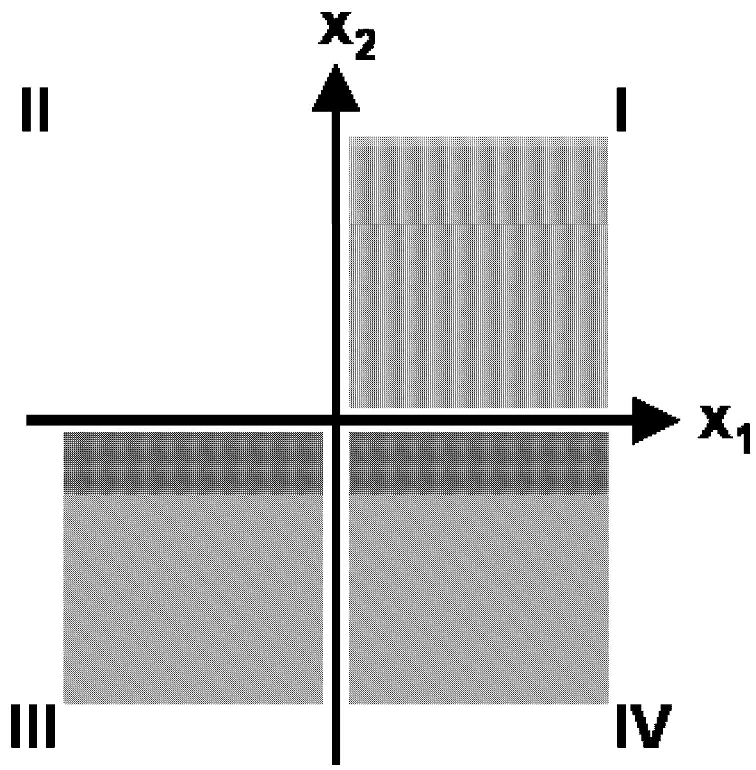

Abbildung 3: Quadranten im kartesischen Koordinatensystem

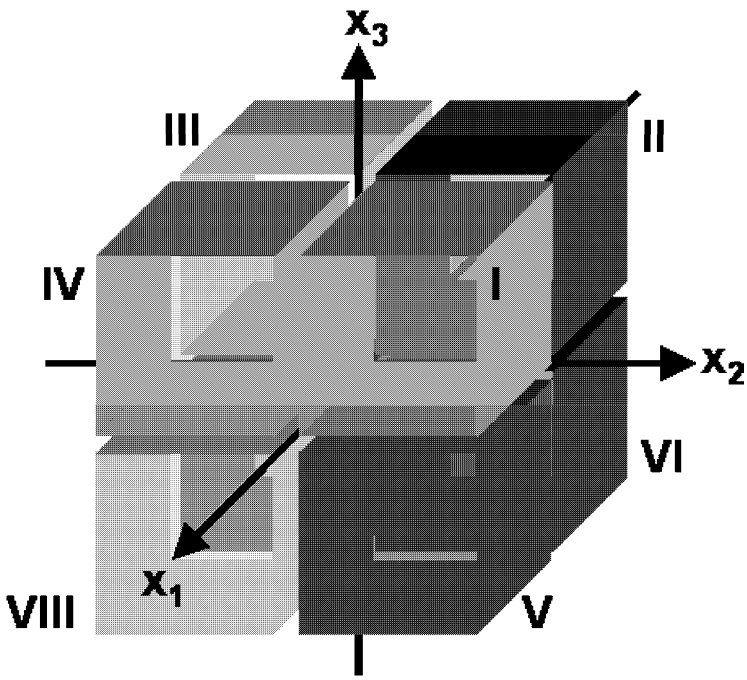

Abbildung 4: Oktanten im kartesischen Koordinatensystem

Da dies immer noch zu ungenau ist werden nun die eigentlichen Koordinaten des Punktes eingeführt.

Die Schreibweise für Punkte lautet:

$$A = (x_1 \mid x_2) \qquad \text{bzw.} \qquad A = (x_1 \mid x_2 \mid x_3)$$

2.2 Ortsvektor

Frage an die Klasse: Kann ein Punkt überhaupt eindeutig durch einen Vektor festgelegt werden?
→ Ja, wenn man einen beliebigen Punkt des Raumes als Bezugspunkt festlegt. Zweckmäßigerweise wird hierfür der Schnittpunkt der Koordinatenachsen verwendet und als *Ursprung* O bezeichnet.
Ein Vektor vom Ursprung O zu einem Punkt C wird nun als Ortsvektor $\vec{OC}$ des Punktes C bezüglich O bezeichnet.

Die Notation für Ortsvektoren lautet:

$$\vec{c} = \vec{OC} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{c} = \vec{OC} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2.3 Freie Vektoren

Vorgehen: Zu dem vorhandenen Punkt A wird ein weiterer Punkt B an die Tafel gezeichnet. Anschließend wird der Vektorpfeil $\vec{v} = \vec{AB}$ hinzugefügt.

Frage an die Klasse: Wie kann dieser Vektor $\vec{v}$ in Spaltenschreibweise dargestellt werden?
→ Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{v}$ bilden einen geschlossenen Streckenzug (siehe Abbildung 5). Damit gilt:

$$\vec{a} + \vec{v} - \vec{b} = \vec{0}$$
$$\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$$

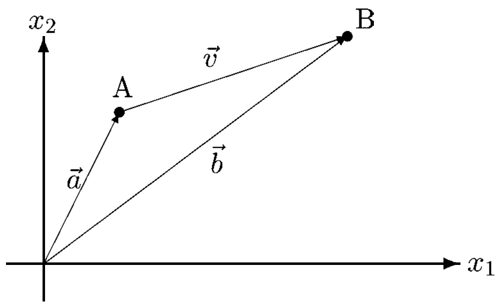

Abbildung 5: Freier Vektor als Differenz zweier Ortsvektoren

Frage an die Klasse: Wird durch diesen Vektor $\vec{v}$ die Lage der zwei Punkte A und B eindeutig festgelegt?
→ Dies ist nicht der Fall, da der Vektor lediglich ein Repräsentant der Menge aller zu diesem Pfeil gleichsinnig paralleler und gleich langer Pfeile ist. D. h. er kann im Raum beliebig parallel verschoben werden, und behält trotzdem seine Koordinaten.

Die Notation für freien Vektor lautet:

$$\vec{u} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{u} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Sieht man nur eine Spaltendarstellung (z. B. $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$) so ist nicht unterscheidbar ob dies ein freier Vektor oder ein Ortsvektor ist.

2.4 Anwendungsbeispiele

Schiefer Wurf

Ein Gegenstand wird von einem etwas erhöhten Ausgangspunkt unter einem bestimmten Winkel weggeworfen (siehe Abbildung 6). Die Flugbahn beschreibt eine Kurve. Jeder Punkt dieser Kurve kann durch einen Ortsvektor angegeben werden. An jedem Punkt der Kurve kann die momentane Bewegungsrichtung und die aktuelle Geschwindigkeit des Gegenstandes durch einen freien Vektor veranschaulicht werden.

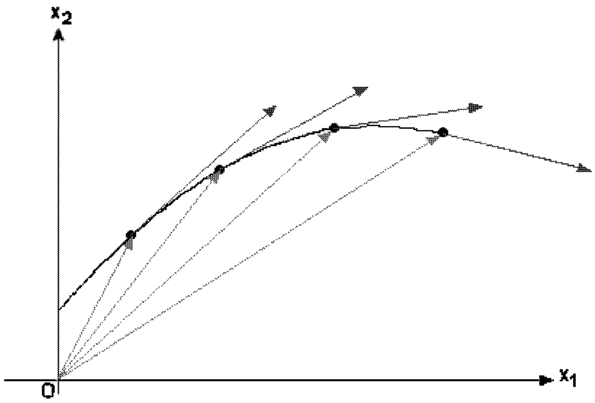

Abbildung 6: Beispiel Schiefer Wurf

Bewegung von Gasmolekülen im Raum

Gasmoleküle bewegen sich im Raum (siehe Abbildung 7). Ihre momentane Richtung und der Betrag der aktuellen Geschwindigkeit wird durch Vektoren dargestellt.

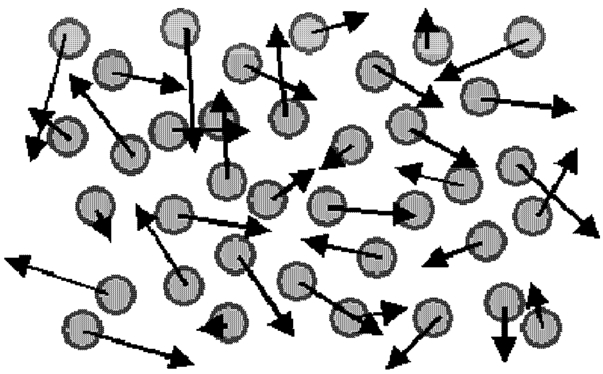

Abbildung 7: Bewegung von Gasmolekülen im Raum