3 Das Skalarprodukt

3.1 Definition

Mechanische Arbeit ist definiert als das Produkt aus Kraft und Weg, wobei diese gleich gerichtet sein müssen. Da die Kraft und der Weg stets einen Angriffs- bzw. einen Startpunkt haben, und auch ihre Richtung entscheidend sind, liegt es nahe, sie als Vektoren darzustellen (vgl. Abbildung 8). Die Länge der Vektoren entspricht der Größe der Kraft, bzw. der Distanz des Weges.

Verlaufen die an einer Masse angreifenden Kraft und der Weg nicht deckungsgleich, so muss der wirksame Kraftanteil berücksichtigt werden. Damit erhält man für die Arbeit die Formel

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\alpha \tag{4}$$

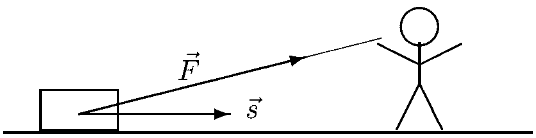


Abbildung 8: Arbeit - Ein Produkt aus Kraft und Weg

Auf der linken Seite der Formel 4 steht eine skalare Größe (W), auf der rechten Seite dagegen das Produkt aus den Beträgen zweier gerichteter Größen ($\vec{F}$ und $\vec{s}$) und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels (α).

Ausgehend davon wird eine neue Rechenoperation definiert: das Produkt zweier Vektoren. Weil das Resultat ein Skalar, also eine reelle Zahl ist, heißt diese Operation *Skalarprodukt*.

Definition:
Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren, so nennt man $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$ das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, wobei α den von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel bezeichnet.

Es können folgende Fälle unterschieden werden:

$$\begin{array}{ll}
\alpha = 0^\circ & : \vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \\
0^\circ < \alpha < 90^\circ & : \vec{a} \circ \vec{b} > 0 \\
\alpha = 90^\circ & : \vec{a} \circ \vec{b} = 0 \\
90^\circ < \alpha < 180^\circ & : \vec{a} \circ \vec{b} < 0 \\
\alpha = 180^\circ & : \vec{a} \circ \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|
\end{array}$$

3.2 Eigenschaften

Da in der Rechenoperation des Skalarproduktes der $\cos\alpha$ des eingeschlossenen Winkels steckt ist folgende Eigenschaft leicht einsichtig:

> **Satz:**
> Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist Null, wenn die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen.
> Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren Null, dann sind die Vektoren orthogonal.

Für den Nullvektor gilt folgende Vereinbarung:

> **Satz:**
> Der Nullvektor $\vec{0}$ steht zu jedem beliebigen Vektor senkrecht. Damit ist ein Skalarprodukt eines Vektors mit einem Nullvektor stets Null.

Des weiteren gilt:

> **Satz:**
> Für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, sowie für jede reelle Zahl k gilt:
>
> - Kommutativgesetz: $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$
> - Distributivgesetz: $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$
> - Gemischtes Assoziativgesetz: $(k \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$
> - Skalarprodukt ist positiv definit: $\vec{a} \circ \vec{a} > 0 \qquad$ für $\vec{a} \neq \vec{0}$

Da Einheitsvektoren so definiert sind, dass sie die Länge 1 haben, ergibt sich für sie folgende Beziehungen:

$$\vec{e_1} \circ \vec{e_1} = |\vec{e_1}| \cdot |\vec{e_1}| \cdot \cos(0) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{e_1} \circ \vec{e_2} = |\vec{e_1}| \cdot |\vec{e_2}| \cdot \cos(90) = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

3.3 Berechnung des Skalarproduktes

Die folgende Herleitung ist aus Gründen der Übersichtlichkeit für Vektoren im $\mathbf{R^2}$ ausgeführt. Sie kann jedoch analog im $\mathbf{R^3}$ erfolgen.

Gegeben seien die zwei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2$$

Berechnung des Skalarproduktes:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2) \cdot (b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2)$$

Anwendung des Distributivgesetzes:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 \cdot \underbrace{(\vec{e}_1 \circ \vec{e}_1)}_{=1} + a_1 \cdot b_2 \cdot \underbrace{(\vec{e}_1 \circ \vec{e}_2)}_{=0} + a_2 \cdot b_1 \cdot \underbrace{(\vec{e}_2 \circ \vec{e}_1)}_{=0} + a_2 \cdot b_2 \cdot \underbrace{(\vec{e}_2 \circ \vec{e}_2)}_{=1}$$

Damit erhält man den vereinfachten Ausdruck:

$$\underline{\underline{\rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2}}$$

Satz:
Für die Berechnung des Skalarproduktes aus den Koordinaten zweier Vektoren im kartesischen Koordinatensystem gilt:

- Im $\mathbf{R^2}$: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$
- Im $\mathbf{R^3}$: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

3.4 Beispiel

Eine Kraft $\vec{F}$ mit dem Betrag 5000 N, die in Richtung der positiven z-Achse wirkt, bewegt einen Körper von $A(2|1|-4)$ nach $B(2|4|0)$.

Im kartesischen Koordinatensystem entspricht eine Einheit auf der x_1- und der x_2-Achse je einem Meter, auf der x_3-Achse sei eine Einheit gleich 1 kN.

Welche Arbeit wird bei dieser Bewegung verrichtet?

Lösung:

$$\text{Kraft } \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{zurückgelegter Weg } \vec{s} = \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{verrichtete Arbeit } W = \vec{F} \circ \vec{s}$$

$$\underline{\underline{W =}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = \underline{\underline{20[kNm]}}$$

Übungsaufgaben

Berechnen Sie jeweils das Skalarprodukt der folgenden Vektoren.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{g} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\vec{h} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Für welchen Wert von k sind folgende Vektoren orthogonal?

e) $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{f} = \begin{pmatrix} k \\ 9 \\ 17 \end{pmatrix}$ **f)** $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 3 \end{pmatrix}$

g) $\vec{m} = \begin{pmatrix} 14 \\ -18 \\ k \end{pmatrix}$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ **h)** $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$

Lösungen:

a) 41
b) -8
c) 0
d) -33
e) -7
f) -9
g) -34
h) 0 (Nullvektor ist stets orthogonal!)

3.5 Anwendungen des Skalarproduktes

3.5.1 Betrag (Länge) eines Vektors

Die Formel für den Betrag (bzw. die Länge) eines Vektors kann mit Hilfe des Skalarproduktes sehr leicht hergeleitet werden:

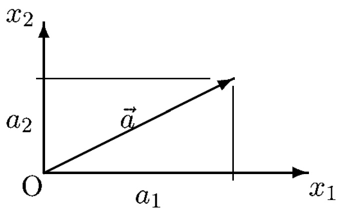
$$\vec{a} \circ \vec{a} = (\vec{a})^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(0) = |\vec{a}|^2$$

$$\rightarrow (\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2 \quad \rightarrow |\vec{a}| = \pm\sqrt{(\vec{a})^2}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}}$$

Anmerkungen:
1) Wurzel und Quadrat heben sich <u>nicht</u> auf, da das Quadrat keine S-Multiplikation sondern eine Skalarmultiplikation darstellt!
2) Das Minuszeichen vor der Wurzel kann man weglassen, da ein Betrag nie negativ sein kann.

Diese Formel kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras überprüft werden. Abbildung 9 zeigt die Aufspaltung eines Vektors $\vec{a}$ in seine Komponenten für den $\mathbf{R^2}$ und den $\mathbf{R^3}$.



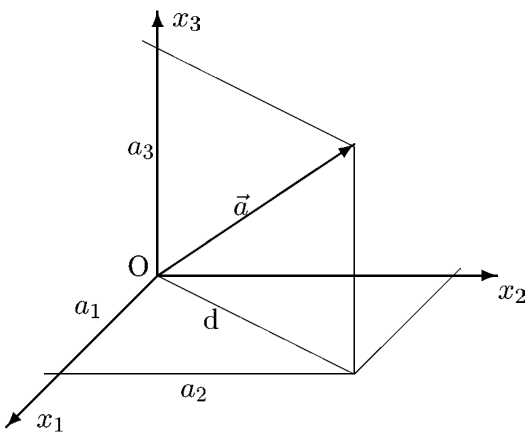


Abbildung 9: Aufspaltung eines Vektors in Komponenten im $\mathbf{R^2}$ und $\mathbf{R^3}$

Mit dem Satz von Pythagoras erhält man dadurch die Länge, also den Betrag eines Vektors:

Im $\mathbf{R^2}$

$$\underline{\underline{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}}$$

Im $\mathbf{R^3}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{d^2 + a_3^2} \qquad \text{mit: } d = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\underline{\underline{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}}$$

Übungsaufgaben

1. Berechnen Sie jeweils den Betrag des Vektors.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Bestimmen Sie den Abstand der Punkte $A(11|-9|3)$ und $B(7|0|1)$.

3. Für welches k hat der Abstand der Punkte $C(1|4|1)$ und $D(-1|3|k)$ den Wert 3?

4. Gegeben sind die drei Punkte $E(2|-2|5)$, $F(0|6|-1)$ und $G(1|m|2)$. Bestimmen Sie m so, dass G genau mittig zwischen E und F liegt.

Lösungen:

1. $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{22}$
   $|\vec{b}| = \sqrt{0^2 + (-7)^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}$
   $|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$
   $|\vec{d}| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$
   $|\vec{e}| = \sqrt{(-6)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{40}$

2. $|\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{101}$

3. $k = 3$

4. $m = 2$

3.5.2 Winkel zwischen zwei Vektoren

Aus der Definition des Skalarproduktes ($\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$) folgt folgende Formel für die Bestimmung des Winkels zwischen zwei Vektoren:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Achtung: Der Kosinus des Winkels α ist stets identisch mit dem Kosinus des Winkels $360° - \alpha$. Für den Winkel zwischen zwei Vektoren wird jedoch immer der spitze Winkel gewählt.

Sind nur drei Punkte A, B und C gegeben, und ist der damit eingeschlossene Winkel gesucht, so ist die Richtung der Vektoren entscheidend, denn es gilt (siehe auch Abbildung 10):

$$\underbrace{\sphericalangle(\vec{BA}, \vec{BC})}_{=\alpha} = 180° - \underbrace{\sphericalangle(\vec{AB}, \vec{BC})}_{=\beta}$$

Übungsaufgaben

1. Welchen Winkel schließen die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ein?

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

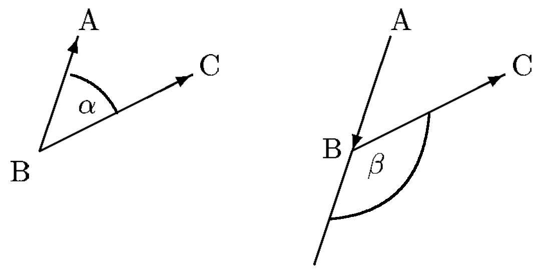


Abbildung 10: Winkel zwischen zwei Vektoren

2. Bestimmen Sie den Winkel β (bei Punkt B), welcher durch die drei Punkte $A(0|1|0)$, $B(-2|9|1)$ und $C(-3|-2|4)$ gebildet wird.

3. Für welches k schließen die Vektoren $\vec{m}$ und $\vec{n}$ einen Winkel von 120 Grad ein?

   a) $\vec{m} = \begin{pmatrix} -4 \\ k \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{m} = \begin{pmatrix} k \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösungen:

1. $\varphi = 43,83°$

2. $\beta = 29,19°$

3. **a)** Es gibt kein reelles k für das der eingeschlossene Winkel 120 Grad wird.
   b) $k_1 = 1,63 \quad$ oder $\quad k_2 = -5,73$

3.5.3 Senkrechte Projektion eines Vektors auf einen anderen Vektor

Es wird der Vektor $\vec{b}_{\vec{a}}$ (sprich: Vektor b bezüglich Vektor a) gesucht, der durch senkrechte Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ entsteht (siehe Abbildung 11).

Die Länge dieses gesuchten Vektors lässt sich in folgendermaßen ermitteln:

$$|\vec{b}_{\vec{a}}| = |\vec{b}| \cdot \cos\varphi \tag{5}$$

Aus der Definition des Skalarproduktes lässt sich ein anderer Ausdruck für den rechten Teil der Gleichung 5 finden:

$$\text{aus:} \quad \vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi \qquad \text{folgt:} \quad |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|}$$

Damit erhält man die Gleichung:

$$|\vec{b}_{\vec{a}}| = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|}$$

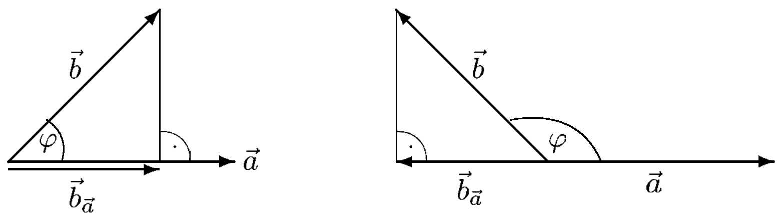


Abbildung 11: Senkrechte Projektion eines Vektors auf einen anderen Vektor

Auf der rechten Seite der Gleichung steht nun jedoch ein Skalar. Gesucht war aber ein Vektor mit der Richtung parallel zu $\vec{a}$ mit der Länge der Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$. Deshalb muss der Skalar (der die Länge des gesuchten Vektors angibt) noch mit dem Einheitsvektor in Richtung von $\vec{a}$ multipliziert werden. Damit wird die Richtung des gesuchten Vektors festgelegt, ohne jedoch die Länge erneut zu beeinflussen (da der Einheitsvektor die Länge 1 hat!).

$$\vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}^0 = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

Übungsaufgaben

1. Geben Sie den Vektor an, welcher durch Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf Vektor $\vec{a}$ entsteht.
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. **a)** Geben Sie den Vektor an, welcher durch Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf Vektor $\vec{a}$ entsteht.
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   b) Erklären Sie die Bedeutung der Vorzeichen im Vektor $\vec{b}_{\vec{a}}$.

Lösungen:

1. $\vec{b}_{\vec{a}} = -\frac{9}{14} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. **a)** $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

   b) Der Vektor $\vec{b}_{\vec{a}}$ weist entgegengesetzt von $\vec{a}$.

3.5.4 Flächeninhalt eines Parallelogramms

Wie Abbildung 12 zeigt, spannen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein Parallelogramm auf.

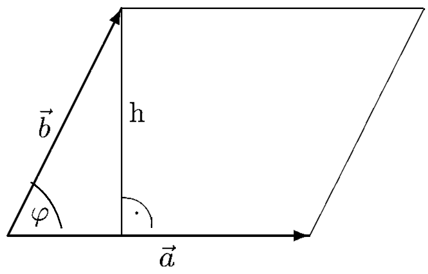


Abbildung 12: Parallelogramm mit Vektoren

Die Fläche dieses Parallelogramms wird berechnet über:

$$F_{Plgr} = |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}| \cdot \underbrace{|\vec{b}| \cdot \sin\varphi}_{=h} \tag{6}$$

Aus dem Zusammenhang $(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2 = 1$ erhält man den Ausdruck $\sin\varphi = \sqrt{1 - (\cos\varphi)^2}$. Damit lässt sich Formel 6 umstellen zu:

$$\begin{aligned} A_{Plgr} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sqrt{1 - (\cos\varphi)^2} \\ &= \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (1 - (\cos\varphi)^2)} \\ &= \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (\cos\varphi)^2} \\ &= \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi)^2} \\ &= \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \circ \vec{b})^2} \end{aligned}$$

Übungsaufgaben

1. Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ spannen ein Parallelogramm im Raum auf. Ermitteln Sie den Umfang und den Flächeninhalt.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 22 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -19 \end{pmatrix}$$

Lösungen:

1. Umfang: 90,86 Flächeninhalt: 484,90