4 Das Vektorprodukt

4.1 Definition

In Kapitel 3.5.4 wurde bereits eine Formel zur Berechnung der Fläche eines Parallelogramms, das durch die zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, hergeleitet:

$$A_{Plgr} = \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \circ \vec{b})^2}$$

Diese Formel kann ausmultipliziert und umgestellt werden:

$$\begin{aligned} A_{Plgr} &= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2} \\ &= \sqrt{(a_1 b_2)^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 + (a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3)2 - a_1 b_3 a_3 b_1 + (a_3 b_1)^2 + (a_2 b_3)^2 - a_2 b_3 a_3 b_2 + (a_3 b_2)^2} \\ &= \sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} \end{aligned}$$

Werden die Differenzen (ohne die Quadrate!) unter der Wurzel durch d_1, d_2 bzw. d_3 substituiert, so erhält man:

$$A_{Plgr} = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2} \tag{7}$$

Diese Formel entspricht aber genau der Formel zur Berechnung des Betrages eines Vektors $\vec{d}$ (siehe 3.5.1).

Bei näherer Untersuchung kann man eine (überraschende) Eigenschaft des Vektors $\vec{d}$ feststellen. Er steht nämlich auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht (vgl. Abbildung 13)!

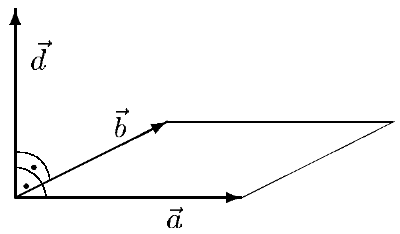

Abbildung 13: Das Vektorprodukt

Wir erinnern uns noch einmal zurück: Der Vektor $\vec{d}$ entstand erst aus der Flächenberechnung des Parallelogramms das durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Und genau auf diesen beiden Vektoren steht er nun senkrecht. Der Nachweis dass die Vektoren senkrecht zueinander stehen wird mit dem Skalarprodukt geführt:

$$\vec{d} \circ \vec{a} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2) \cdot a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3) \cdot a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1) \cdot a_3 \\
&= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{d} \circ \vec{b} &= \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_2b_3 - b_3b_2 \\ b_3b_1 - b_1b_3 \\ b_1b_2 - b_2b_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
&= (b_2b_3 - b_3b_2) \cdot b_1 + (b_3b_1 - b_1b_3) \cdot b_2 + (b_1b_2 - b_2b_1) \cdot b_3 \\
&= b_1b_2b_3 - b_1b_3b_2 + b_2b_3b_1 - b_1b_2b_3 + b_1b_3b_2 - b_2b_3b_1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Außerdem entspricht die Länge von $\vec{d}$ genau der Fläche des Parallelogramms A_{Plgr} (siehe Formel 7) das durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildet wird.

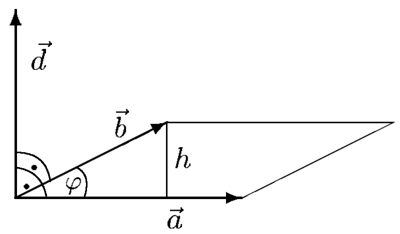

Abbildung 14: Die Fläche eines Parallelogramms

Wie bereits bekannt lässt sich die Fläche eines Parallelogramms aber auch über die folgende Formel berechnen (vgl. Abbildung 14):

$$A_{Plgr} = |\vec{a}| \cdot h$$

Der Betrag von $\vec{a}$ ist bekannt, und die Höhe des Parallelogramms kann über die Länge des Vektors $\vec{b}$ und den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ermittelt werden:

$$
\begin{aligned}
A_{Plgr} &= |\vec{a}| \cdot h \\
&= |\vec{a}| \cdot \sin\varphi
\end{aligned}
$$

Damit wurde ein Zusammenhang zwischen dem Kreuzprodukt und dem Sinus des Zwischenwinkels hergestellt.

Definition
Genau zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist in dieser Reihenfolge ein auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht stehender Vektor $\vec{d}$ zugeordnet:

$$\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} \qquad \text{sprich: } \vec{d} \text{ ist } \vec{a} \text{ Kreuz } \vec{b}$$

Die Länge des Vektors $\vec{d}$ entspricht der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms:

$$\begin{aligned} A_{Plgr} &= |\vec{d}| \\ &= |\vec{a} \times \vec{b}| \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi \qquad 0 < \varphi < 180^\circ \end{aligned}$$

4.2 Eigenschaften

Es besteht ein Unterschied ob $\vec{a} \times \vec{b}$ oder $\vec{b} \times \vec{a}$ gerechnet wird!

Da also die Reihenfolge der Vektoren entscheidend ist hat man dem Kind auch einen Namen gegeben: die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden in genau dieser Reihenfolge ein so genanntes *Rechtssystem.*

Rechtssystem:
Haben die Repräsentanten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ denselben Anfangspunkt und dreht man den Vektor $\vec{a}$ über den kleineren Zwischenwinkel in den Vektor $\vec{b}$, so bewegt man sich im Sinne einer Rechtsschraube in die Richtung des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$.

Dafür gibt es eine kleine Eselsbrücke: die „Rechte-Hand-Regel“. Zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung des Vektors $\vec{a}$ und der Zeigefinger in Richtung $\vec{b}$, dann weist der abgespreizte Mittelfinger in Richtung $\vec{a} \times \vec{b}$.

Zusammen mit den bereits in 4.1 erarbeiteten Eigenschaften kann man festhalten:

Eigenschaften des Vektorproduktes:

- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, falls $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$, oder $\vec{a}$ parallel zu $\vec{b}$
- In allen anderen Fällen ist $\vec{a} \times \vec{b}$ derjenige Vektor,
  - der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht
  - mit dem $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ ein Rechtssystem darstellt
  - dessen Betrag gleich dem Flächeninhalt A_{Plgr} des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist.

Auch beim Vektorprodukt gelten bestimmte Rechenregeln:

Satz:
Für das Vektorprodukt gelten folgende Gesetze:

- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad$ falls $\quad \vec{a} = k \cdot \vec{b} \quad$ ($\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig)
- Alternativgesetz: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ bzw. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- Distributivgesetz: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- Multiplikation mit einem Skalar: $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) \quad \lambda \in \mathbf{R}$

Das Assoziativgesetz trifft im Allgemeinen nicht zu.

4.3 Berechnung des Vektorproduktes

Um das Vektorprodukt praktisch zu berechnen könnte man nun obige Formel auswendig lernen:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Dies ist für den täglichen Einsatz jedoch nicht geeignet. Deshalb gibt es ein kleines Schema, das nach ein wenig Übung recht leicht von der Hand geht. Zunächst schreibt man die Rechnung an.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Um nun die erste Koordinate des Vektorproduktes zu berechnen, deckt man in den beiden Vektoren genau diese erste Zeile ab. Die restlichen 4 Zahlen kann man wie eine Matrix ansehen, und davon die Determinante berechnen:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \blacksquare \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \blacksquare \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Für die Berechnung der zweiten Koordinate geht man ähnlich vor: man deckt zunächst die zweite Zeile in den Vektoren ab. Nun steht darunter aber keine Matrix mehr, sondern nur noch eine einzelne Zeile. Hier behilft man sich mit einem Trick. Die erste Zeile wird (gedanklich) noch einmal unten angeschrieben. Jetzt kann die Berechnung wieder wie bekannt erfolgen.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} a_1 \\ \blacksquare \\ a_3 \end{pmatrix} \\ a_1 \end{array} \times \begin{array}{c}\begin{pmatrix} b_1 \\ \blacksquare \\ b_3 \end{pmatrix} \\ b_1 \end{array} = \begin{pmatrix} \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ \\ \end{pmatrix}$$

Um die letzte Zeile zu berechnen deckt man nun die unterste Zeile in den Vektoren ab, sieht die verbliebenen vier Zahlen als Matrix an und berechnet deren Determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \blacksquare \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \blacksquare \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Nimmt man diese drei Schritte zusammen, so erhält man selbstverständlich das gleiche Ergebnis wie zu Beginn dieses Abschnittes bereits vorgestellt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Übungsaufgaben

Berechnen Sie jeweils das Vektorprodukt der folgenden Vektoren.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{g} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{h} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$ **f)** $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

g) $\vec{m} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ **h)** $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

i) Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Berechnen Sie $\vec{a}\times\vec{b}$ und $\vec{b}\times\vec{a}$. Diskutieren Sie das Ergebnis.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösungen:

a) $\begin{pmatrix} -7 \\ 13 \\ -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -9 \\ -14 \\ -45 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 28 \\ -14 \\ -14 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($\rightarrow$ Vektoren sind parallel!)

e) $\begin{pmatrix} -39 \\ 9 \\ 33 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 52 \end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($\rightarrow$ Vektoren sind parallel!)

i) $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b}\times\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Werden die zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ vertauscht, so zeigt das Vektorprodukt in die entgegengesetzte Richtung. An diesem Beispiel kann auch die Rechte-Hand-Regel geübt werden!

4.4 Anwendungen des Vektorproduktes

4.4.1 Flächeninhalt eines Parallelogramms

Bereits aus der Herleitung des Vektorproduktes geht hervor, dass der Betrag des Normalenvektors, des durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms, eine Maßzahl für den Flächeninhalt dieses Parallelogramms ist.

Flächeninhalt eines Parallelogramms
Wird durch die zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein Parallelogramm aufgespannt, so entspricht der Betrag des Vektorproduktes von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dem Flächeninhalt davon:

$$A_{Plgr} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Übungsaufgaben

Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ spannen ein Parallelogramm im Raum auf. Ermitteln Sie den Flächeninhalt.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 22 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -19 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \begin{pmatrix} 22 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -19 \end{pmatrix} \\ \vec{n} &= \begin{pmatrix} 230 \\ 425 \\ 40 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \left| \begin{pmatrix} 230 \\ 425 \\ 40 \end{pmatrix} \right| \\ A &= \sqrt{230^2 + 425^2 + 40^2} \\ A &= 484,90 \end{aligned}$$

→ Der Flächeninhalt beträgt 484,90 Maßeinheiten.

4.4.2 Flächeninhalt eines Dreiecks

Um die Fläche eines Dreiecks zu berechnen sollte man sich zunächst den Zusammenhang zwischen einem Dreieck und einem Parallelogramm verdeutlichen:

Jedes Dreieck kann zu einem Parallelogramm erweitert werden. Dieses hat dann die doppelte Fläche des Dreiecks (siehe Abbildung 15).

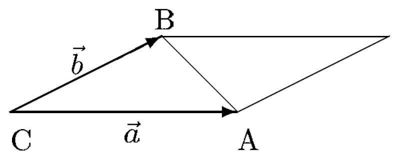

Abbildung 15: Erweiterung eines Dreiecks zu einem Parallelogramm

Damit ist die Formel für die Dreiecksfläche bereits klar. Sie entspricht der Hälfte der Fläche des Parallelogramms, welches durch die zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

Leider kann nicht sofort eine Formel angegeben werden, da zunächst unterschieden werden muss, ob das Dreieck durch zwei Ortsvektoren und den Ursprung, oder durch drei Ortsvektoren definiert wird (siehe Abbildung 16).

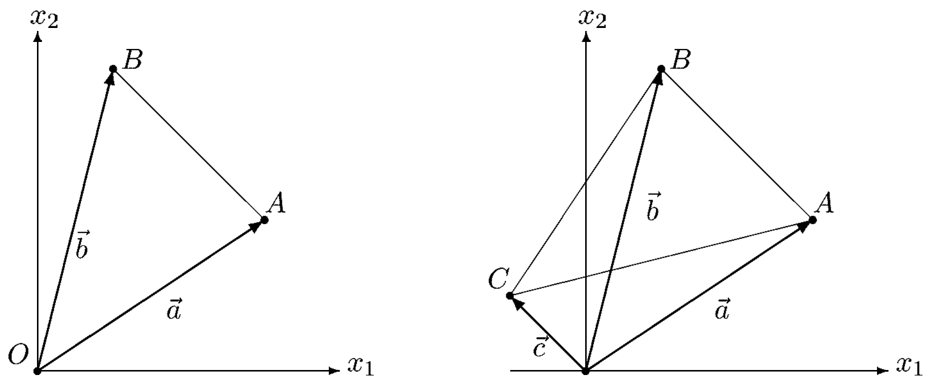

Abbildung 16: Lage von Dreiecken

Sind nur zwei Ortsvektoren gegeben, so kann für die Fläche die bekannte Formel für das Parallelogramm einfach um den Faktor $0,5$ erweitert werden.

Sind dagegen drei Ortsvektoren gegeben, so müssen erst zwei Differenzvektoren berechnet werden, und über diese kann die Fläche ermittelt werden.

Flächeninhalt eines Dreiecks
Die Formel für Fläche eines Dreiecks ...

... zwischen zwei Punkten und dem Ursprung lautet

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$$

... zwischen drei Punkten lautet

$$\begin{aligned} A_{Dreieck} &= \frac{1}{2} \cdot |(\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{c})| \\ &= \frac{1}{2} \cdot |(\vec{c} - \vec{a}) \times (\vec{b} - \vec{a})| \\ &= \frac{1}{2} \cdot |(\vec{c} - \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| \end{aligned}$$

Alle bisherigen Berechnungen berücksichtigen nur Vektoren im $\mathbf{R}^3$, obwohl Abbildung 16 nur Punkte im $\mathbf{R}^2$ zeigt. Da die Berechnung der Fläche eines Dreiecks über das Vektorprodukt erfolgt, und im $\mathbf{R}^2$ kein senkrechter Vektor zu zwei gegebenen Vektoren existiert, könnte man davon ausgehen, dass dort auch die Dreiecksfläche nicht mit dieser Methode berechenbar sei.

Es kommt bei der Berechnung jedoch nicht auf den senkrechten Vektor an, sondern auf dessen Betrag. Deshalb gelten obige Formeln auch im $\mathbf{R}^2$. Bei der eigentlichen Rechnung müssen diese Vektoren einfach um eine dritte Koordinate $x_3 = 0$ ergänzt werden.

Übungsaufgaben

Berechnen Sie die Fläche der Dreiecke, welche durch folgende Punkte aufgespannt werden:
a) $A(5|-1|-1)$ $B(1|-3|8)$
b) $A(2|4|-1)$ $B(3|9|1)$ $C(5|4|5)$
c) $A(3|7)$ $B(0|4)$

Lösungen:
a) $A = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = 22,35$

b) mit $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$: $A = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = 16,77$

c) $A = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 6$

4.4.3 Volumen eines Spats

Drei linear unabhängige Vektoren spannen im Raum einen so genannten *Spat* (auch *Parallelflach* oder *Parallelepiped* genannt) auf (siehe Abbildung 17).

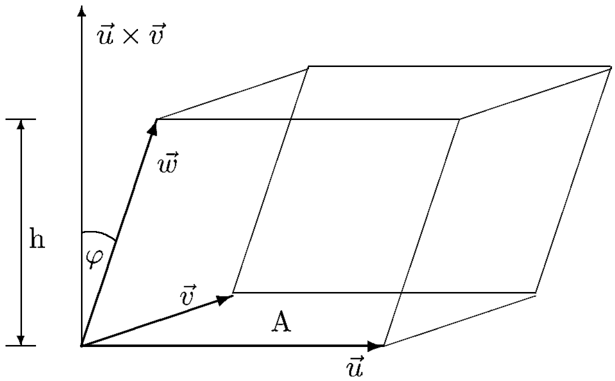

Abbildung 17: Drei lin. unabh. Vektoren spannen einen Spat auf

Das Volumen dieses Spats berechnet sich aus:

$$V_{Spat} = A \cdot h$$

Wie in Kapitel 4.4.1 gezeigt, lässt sich die Grundfläche mit Hilfe des Vektorproduktes berechnen:

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

Die Höhe h erhält man über die Winkelfunktion:

$$h = w \cdot \cos\varphi \qquad \text{bzw.} \qquad h = |\vec{w}| \cdot \cos\varphi$$

Setzt man diese Formeln zusammen so erhält man:

$$V_{Spat} = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\varphi$$

Vergleicht man diese Formel mit der Definition des Skalarproduktes aus 3.1, so erkennt man, dass es eine verkürzte Schreibweise gibt:

$$V_{Spat} = (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}$$

Volumen eines Spats
Das Volumen eines Spats wird mit $V_{Spat} = (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}$ berechnet. Diesen Ausdruck nennt man auch *Spatprodukt* oder *gemischtes Skalarprodukt.*

Bemerkungen:

- Erhält man für das Volumen den Wert $V_{Spat} = 0$, dann spannen die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ keinen Spat auf. Sie liegen dann vielmehr in einer Ebene und sind linear abhängig.

- Ist $V_{Spat} > 0$ so bilden die drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ein Rechtssystem. Bilden sie jedoch in dieser Reihenfolge ein linksorientiertes Dreibein, so erhält man ein negatives Ergebnis.

Übungsaufgaben

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie folgende Spatprodukte und interpretieren Sie die Ergebnisse:
a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}$
b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{d}$
c) $(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{e}$

Lösung:
Für alle Aufgaben wird das Vektorprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ benötigt:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 42 \\ -26 \\ 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a)

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = \begin{pmatrix} 42 \\ -26 \\ 11 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = 126 - 104 + 99 = 121$$

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind lin. unabh. (da Ergebnis $\neq 0$) und bilden ein Rechtssystem (da Ergebnis > 0). Der Spat hat die Volumenmaßzahl 121.

b)

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{d} = \begin{pmatrix} 42 \\ -26 \\ 11 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} = 126 - 104 - 99 = -77$$

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{d}$ sind lin. unabh. (da Ergebnis $\neq 0$) und bilden ein Linkssystem (da Ergebnis < 0). Der Spat hat die Volumenmaßzahl 77.

c)

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{e} = \begin{pmatrix} 42 \\ -26 \\ 11 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = 168 - 234 + 66 = 0$$

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{e}$ sind lin. abhängig. (da Ergebnis = 0), d. h. sie liegen in einer Ebene. Der Spat hat die Volumenmaßzahl 0.

4.4.4 (HESSEsche) Normalenform einer Ebene

Zu jeder gegebenen Ebene E: $\vec{x} = \vec{a} + k \cdot \vec{u} + l \cdot \vec{v}$ lassen sich genau zwei Vektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ finden, die senkrecht auf dieser Ebene stehen. Dabei gilt jedoch $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$.

Da der Normalenvektor senkrecht auf der Ebene E steht, muss er auch senkrecht zu den beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ stehen. Damit ist schon erkennbar wie der Normalenvektor berechnet wird.

Normalenvektor einer Ebene
Zu einer gegebenen Ebene E: $\vec{x} = \vec{a} + k \cdot \vec{u} + l \cdot \vec{v}$ lässt sich immer ein Normalenvektor $\vec{n}_1 = \vec{u} \times \vec{v}$ bzw. $\vec{n}_1 = \vec{v} \times \vec{u}$ bestimmen.

Aus dem Aufpunkt A und einem beliebigen Punkt X der Ebene E lässt sich ein Vektor $\vec{AX}$ berechnen. Dieser hat die Eigenschaft in der Ebene zu liegen. Damit bildet auch er mit dem Normalenvektor der Ebene einen 90° Winkel. Mathematisch lässt sich diese Beziehung folgendermaßen ausdrücken:

$$\vec{n} \circ \vec{AX} = 0 \qquad bzw. \qquad \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \tag{8}$$

Geht man davon aus, dass der Normalenvektor und der Aufpunkt einer Ebene gegeben sei und multipliziert man Gleichung 8 aus, so erhält man:

$$\begin{aligned} \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) &= 0 \\ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right] &= 0 \\ n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - (n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3) &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung beschreibt eindeutig die Ebene E mit dem Aufpunkt A und dem Normalenvektor $\vec{n}$.

Normalenform einer Ebenengleichung
Eine Ebene E wird mit Hilfe ihres Normalenvektors und eines beliebigen Punktes der Ebene E eindeutig festgelegt:

$$\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \qquad bzw. \qquad n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$$

Man nennt diese zwei Formen der Normalenform die „*vektorielle Normalenform*“ bzw. die „*skalare Normalenform*“ der Ebenengleichung.

Wird statt eines beliebigen Normalenvektors der Ebene E der Einheitsnormalenvektor $\vec{n}^0$ (gekennzeichnet durch die Länge 1) verwendet, so erhält man die HESSEsche Normalenform.

HESSEsche Normalenform einer Ebenengleichung
Eine Ebene E wird mit Hilfe ihres Normalenvektors und eines beliebigen Punktes der Ebene E eindeutig festgelegt:

$$\vec{n}^0 \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

bzw.

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0 \qquad \text{wobei: } |\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = 1$$

Übungsaufgaben

1. Bestimmen Sie den Normalenvektor der Ebene E.
$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. Geben Sie die vektorielle und die skalare HESSEsche Normalenform der Ebene E mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ und dem Aufpunkt A an.
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad A(2|0|5)$$

3. Beschreiben Sie in Worten die Lage folgender Ebenen:
a) $E : 4x_2 - 3 = 0$
b) $E : x_1 + x_3 = 0$
c) $E : 7x_1 = 0$

Lösungen:

1. $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix}$

2. vektorielle Form: $\frac{1}{\sqrt{8^2+(-1)^2+3^2}} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = 0$
skalare Form: $\frac{8x_1 - x_2 + 3x_3 - 31}{\sqrt{8^2+(-1)^2+3^2}} = 0$

3. a) Ebene parallel zu x_1x_3-Ebene
   b) Ebene läuft durch Ursprung (da $a_4 = 0$) parallel zu x_2-Achse, 45° gegen x_1x_2-Ebene geneigt.
   c) Ebene parallel zu x_2x_3-Ebene

4.4.5 Abstand eines Punktes von einer Geraden im $\mathbf{R^2}$

Die kürzeste Verbindung d eines Punktes P zu einer Geraden g ist das Lot von P auf g (siehe Abbildung 18).

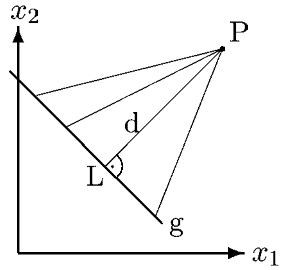

Abbildung 18: Abstand Punkt-Gerade im $\mathbf{R^2}$ (Geometrische Interpretation)

Es sei im $\mathbf{R^2}$ eine Geradengleichung in der vektoriellen HESSEschen Normalenform gegeben:

$$g : \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

Außerdem kennt man die Koordinaten des Punktes P. Gesucht ist der Abstand von P zu g.

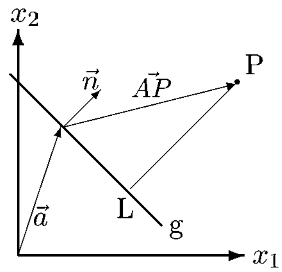

Abbildung 19: Abstand Punkt-Gerade im $\mathbf{R^2}$ (Rechnerische Lösung)

Aus diesen Angaben kann der Differenzvektor $\vec{AP} = \vec{p} - \vec{a}$ gebildet werden. Wie in Kapitel 3.5.3 beschrieben, kann mit dem Skalarprodukt die senkrechte Projektion von $\vec{AP}$ auf den Normalenvektor der Geraden berechnet werden (vgl. auch Abbildung 19). Diese Projektion entspricht jedoch genau dem Lot aus Abbildung 18. Damit entspricht die Länge der Projektion dem gesuchten Abstand vom Punkt P zur Geraden g.

Abstand eines Punktes von einer Geraden im $\mathbf{R}^2$:

- Ist $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ die Gleichung einer Geraden g im $\mathbf{R}^2$ und P ein Punkt der Ebene, so gibt $d = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \circ (\vec{p} - \vec{a})$ den Abstand des Punktes P von g an.
- Ist $n_1x_1 + n_2x_2 + n_0 = 0$ die Gleichung einer Geraden g in der Ebene und $P(p_1|p_2)$ ein Punkt dieser Ebene, so gibt $d = \frac{n_1p_1+n_2p_2+n_0}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}}$ den Abstand des Punktes P von der Geraden g an.

Wird der Abstand eines Punktes P von einer Geraden g nach obiger Formel berechnet, so kann das Ergebnis auch negativ sein. Die Ursache liegt in der Herleitung der Formel. Liegt P auf der Seite der Geraden auf die auch der Normalenvektor $\vec{n}$ zeigt, so ist der Winkel zwischen $\vec{AP}$ und $\vec{n}$ kleiner als 90°. Folglich ist das Skalarprodukt positiv, und damit auch der errechnete Abstand.

Liegt P jedoch auf der Seite der Gerade auf die $\vec{n}$ nicht zeigt, so ist der Winkel größer als 90° und das Skalarprodukt aus $\vec{n} \circ (\vec{p} - \vec{a})$ nimmt einen negativen Wert an.

Mit Hilfe des Vorzeichen des errechneten Abstandes kann man also entscheiden auf welcher Seite der Geraden der Punkt P in Bezug auf die Richtung des Normalenvektors liegt.

Übungsaufgabe

In einem kartesischen Koordinatensystem seien eine Gerade g durch ihre Gleichung $\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{3} = 1$ gegeben. Es sind die Abstände der drei Punkte $P(4|6)$, $Q(6|3)$ und $R(2|1,5)$ von der Geraden g zu bestimmen.

- **Abstand von P zu g**
  Normalenvektor aus Geradengleichung: $\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
  Durch einsetzen von $x_2 = 0$ erhält man einen Punkt der Geraden: $A(4|0)$
  Abstand: $d = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 4,80$
  $\rightarrow$ Der Punkt P liegt im Abstand von 4,8 Längeneinheiten von g.
- **Abstand von Q zu g**
  Abstand: $d = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = -1,20$
  $\rightarrow$ Der Punkt Q liegt im Abstand von 1,2 Längeneinheiten von g.
- **Abstand von R zu g**
  Abstand: $d = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$
  $\rightarrow$ Der Punkt R liegt auf der Geraden g.

4.4.6 Abstand eines Punktes von einer Geraden im $\mathbf{R}^3$

Die Gleichung einer Geraden im $\mathbf{R}^3$ kann nur in der Parameterform angegeben werden. Damit entfällt die Möglichkeit zur Berechnung des Abstandes eines Punktes von der Geraden wie im vorherigen Kapitel vorgestellt.

1. Möglichkeit

Ist die Gerade in Abbildung 19 in der Form $g : \vec{x} = \vec{a} + k\vec{u}$ gegeben, muss trotzdem ein Punkt L gefunden werden, so dass gilt:

$$\vec{LP} \perp g$$

Da der Punkt L aber ein Punkt der Geraden g ist, muss es eine reelle Zahl t geben, für die gilt:

$$\vec{l} = \vec{a} + t\vec{u} \tag{9}$$

Weil L jedoch so speziell gewählt wurde dass $\vec{LP}$ senkrecht auf der Geraden steht gilt daneben noch:

$$(\vec{p} - \vec{l}) \circ \vec{u} = 0 \tag{10}$$

Setzt man nun Gleichung 9 in den Ausdruck 10 ein, erhält man:

$$\begin{aligned} [\vec{p} - (\vec{a} + t\vec{u})] \circ \vec{u} &= 0 \\ (\vec{p} - \vec{a}) \circ \vec{u} - t \cdot \vec{u}^2 &= 0 \\ \rightarrow \quad t &= \frac{(\vec{p} - \vec{a}) \circ \vec{u}}{\vec{u}^2} \end{aligned}$$

Dieser Wert von t wird in Gleichung 9 eingesetzt, und damit der Ortsvektor des Punktes L bestimmt.

Ist dieser ermittelt, kann der Differenzvektor $\vec{LP}$ sehr leicht angegeben werden. Der Betrag davon ($|\vec{LP}|$) entspricht dem gesuchten Abstand.

Abstand eines Punktes von einer Geraden
Ist $\vec{x} = \vec{a} + k\vec{u}$ die Gleichung einer Geraden im $\mathbf{R}^3$ und P ein Punkt im Raum, so wird zunächst der zum Lotfusspunkt gehörende Parameter k bestimmt:

$$t = \frac{(\vec{p} - \vec{a}) \circ \vec{u}}{\vec{u}^2}$$

Nun können die Koordinaten von L ermittelt werden. Abschließend wird der Betrag des Vektors $\vec{PL}$ berechnet.

Übungsaufgabe

Gegeben sei die Gerade g und der Punkt P. Bestimmen Sie den Abstand von P zu g.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad P(2|1|-3)$$

Lösung:

$$t = \frac{\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = -\frac{5}{9}$$

$$\text{t in Geradengleichung:} \quad \vec{l} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (-\frac{5}{9}) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{9} \\ \frac{13}{9} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad |\vec{LP}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{19}{9} \\ \frac{13}{9} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(\frac{37}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(-\frac{35}{9}\right)^2} \approx 5,676$$

$\rightarrow$ Der Abstand von P zu g beträgt 5,676 Längeneinheiten.

2. Möglichkeit

Auch hier sind eine Gerade $g : \vec{x} = \vec{a} + k \cdot \vec{u}$ und ein Punkt P im Raum gegeben. Der Abstand von P zu g soll ermittelt werden.

Selbstverständlich gilt auch hier dass die kürzeste Verbindung von P zu g das Lot von P auf g darstellt. Nachdem der Lotfusspunkt L auf der Geraden jedoch noch nicht bekannt ist wird einfach ein beliebiger Punkt Q auf der Geraden ausgewählt.

Der Differenzvektor $\vec{QP}$ spannt zusammen mit dem Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden ein Parallelogramm auf, dessen Höhe d dem Betrag des (eigentlich gesuchten) Lotes $\vec{PL}$ entspricht. Den Flächeninhalt des Parallelogramms kann man mit $A = d \cdot |\vec{u}|$ bestimmen. Wie auf Seite 23 gezeigt kann die Fläche jedoch auch über das Kreuzprodukt berechnet werden: $A = |\vec{u} \times \vec{QP}|$.

Setzt man diese beiden Ausdrücke für die Flächeninhalte gleich und löst nach d auf, so erhält man

$$d = \frac{|\vec{u} \times \vec{QP}|}{|\vec{u}|}$$

Abstand eines Punktes von einer Geraden im $\mathbf{R}^3$
Ist $\vec{x} = \vec{a} + k \cdot \vec{u}$ die Gleichung einer Geraden g im Raum, Q ein beliebiger Punkt der Gerade und P ein Punkt des Raumes, so gibt $d = \frac{|\vec{u} \times \vec{QP}|}{|\vec{u}|}$ den Abstand des Punktes P von der Geraden g an.

Übungsaufgabe

Gegeben sei die Gerade g und der Punkt P. Bestimmen Sie den Abstand von P zu g.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P(2|3|-1)$$

Lösung:
Beliebiger Punkt auf g ($k = 1$): $Q(2|4|4)$
→ Abstand:

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{107}}{\sqrt{6}} \approx 4,22$$

→ Der Abstand von P zu g beträgt 4,22 Längeneinheiten.

4.4.7 Abstand eines Punktes von einer Ebene

Die Vorüberlegungen zum Berechnen des Abstandes eines Punktes von einer Ebene sind fast identisch mit den Gedanken in Abschnitt 4.4.5.

Abstand eines Punktes von einer Ebene:

- Ist $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ die Gleichung einer Ebene E im $\mathbf{R}^3$ und P ein Punkt des Raumes, so gibt $d = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \circ (\vec{p} - \vec{a})$ den Abstand des Punktes P von E an.
- Ist $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_0 = 0$ die Gleichung einer Ebene E im Raum und $P(p_1|p_2|p_3)$ ein Punkt dieses Raumes, so gibt $d = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + n_0}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$ den Abstand des Punktes P von der Ebene E an.

Übungsaufgabe

Die Ebene E sei mit der Gleichung $E : 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 9 = 0$ gegeben. Berechnen Sie die Abstände der Punkte $P(1|2|3)$, $Q(3|1|2)$ und $R(2|-4|1)$ von E.

Lösung:

- **Abstand von P zu E**

$$d = \frac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 9}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}} \approx -1,87$$

Der Punkt P hat einen Abstand von 1,87 Längeneinheiten zu E.

- **Abstand von Q zu E**

$$d = \frac{3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 9}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 0$$

Der Punkt P liegt in der Ebene.

- **Abstand von R zu E**

$$d = \frac{3 \cdot 2 - 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 1 - 9}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}} \approx 1,60$$

Der Punkt P hat einen Abstand von 1,60 Längeneinheiten zu E.

Fußpunkt der Lotgeraden von P auf E

Sind bei einer Aufgabe noch zusätzlich die Koordinaten des Lotfußpunktes (Schnittpunkt der Lotgeraden von P auf E mit der Ebene E) gesucht, so wird wie folgt vorgegangen:

1. Berechnung des Abstandes von P zu E wie oben beschrieben.
2. Gleichung der Lotgeraden aufstellen (Aufpunkt ist der Punkt P, Richtungsvektor ist der Normalenvektor der Ebene E).
3. Lotgerade mit der Ebene E schneiden $\rightarrow$ Wert für Parameter k aus der Geradengleichung bestimmen.
4. k in Gleichung der Lotgeraden einsetzen $\rightarrow$ Koordinaten des Lotfußpunktes.

Übungsaufgabe

Gegeben sei im Raum eine Ebene E mit der Gleichung $E : 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 9 = 0$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Lotgeraden von $P(1|2|3)$ auf E mit der Ebene E.

Lösung:

1. Abstand berechnen

$$|d| = |\frac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 9}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}}| \approx 1{,}87$$

2. Gleichung der Lotgeraden aufstellen

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{p} + k \cdot \vec{n} \\ \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Lotgerade mit der Ebene schneiden
   Gleichung der Lotgeraden zeilenweise anschreiben und in Ebenengleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 3k \\ x_2 &= 2 - 2k \\ x_3 &= 3 + k \end{aligned}$$

$$E : 3 \cdot (1 + 3k) - 2 \cdot (2 - 2k) + 1 \cdot (3 + k) - 9 = 0$$
$$\rightarrow k = 0{,}5$$

4. Koordinaten von L ermitteln

$$\begin{aligned} \vec{l} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{l} &= \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.4.8 Abstand zweier paralleler Geraden

Der Abstand zweier paralleler Geraden kann genauso berechnet werden wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden im $\mathbf{R}^3$ (vgl. Seite 39).

Man wählt einfach auf jeder Geraden einen beliebigen Punkt P bzw. Q. Aus diesen berechnet man den Differenzvektor $\vec{PQ}$. Mit dem Richtungsvektor $\vec{u}$ (beide Geraden haben den gleichen Richtungsvektor!) berechnet man nun den Abstand.

Abstand zweier paralleler Geraden
$\vec{x} = \vec{a} + k \cdot \vec{u}$ sei die Gleichung einer Geraden g und $\vec{x} = \vec{b} + l \cdot \vec{u}$ die Gleichung einer dazu parallelen Geraden h im Raum. Dazu seien P und Q beliebige Punkte auf g bzw. h. Dann kann der Abstand der parallelen Geraden g und h mit $d = \frac{|\vec{u} \times \vec{QP}|}{|\vec{u}|}$ bestimmt werden.

Übungsaufgabe

Gegeben seien die beiden parallelen Geraden g und h. Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Beliebiger Punkt auf g (k=1): $P(2|3|5)$
Beliebiger Punkt auf h (l=0): $Q(2|2|0)$
$\rightarrow$ Abstand:

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}} \approx 2,42$$

$\rightarrow$ Der Abstand der Geraden g und h beträgt 2,42 Längeneinheiten.

4.4.9 Abstand zweier windschiefer Geraden

1. Möglichkeit

Diese erste (aufwendigere) Möglichkeit muss immer dann angewendet werden wenn neben dem Abstand der zwei windschiefen Geraden auch die Koordinaten der beiden am nächsten zueinander liegenden Punkte bekannt sein sollen.

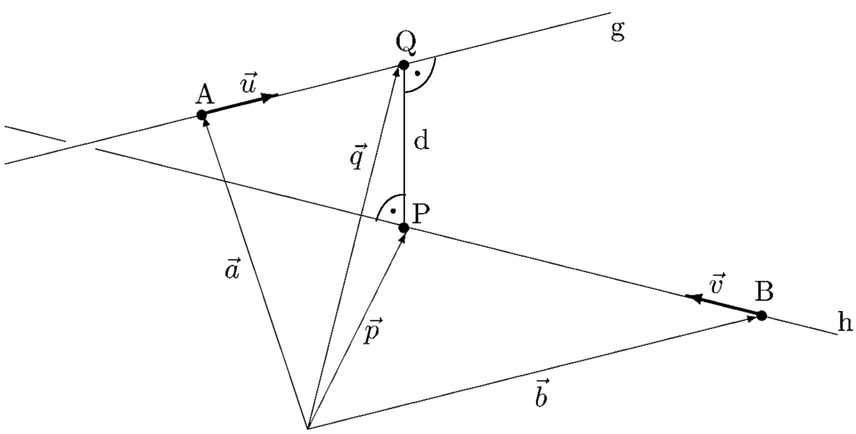

Abbildung 20: Abstand zweier windschiefer Geraden

Gegeben sind die windschiefen Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + k\vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{b} + r\vec{v}$.

Die kürzeste Entfernung zwischen den beiden Geraden sei zwischen den Punkten P und Q. D. h. der Abstand ist $|\vec{d}| = |\vec{PQ}|$. Um den Betrag berechnen zu können müssen die Koordinaten der beiden Punkte bekannt sein. Da die Punkte P und Q auf den Geraden liegen werden die Parameter zunächst einfach angenommen:

$$g: \vec{q} = \vec{a} + k_0\vec{u} \qquad h: \vec{p} = \vec{b} + r_0\vec{v}$$

Damit kann man den Abstand folgendermaßen angeben:

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \vec{PQ} \\ \vec{d} &= \vec{q} - \vec{p} \\ \vec{d} &= (\vec{a} + k_0\vec{u}) - (\vec{b} + r_0\vec{v}) \end{aligned}$$

Hier wird nun ein kleiner „Kniff“ angewendet:
Man multipliziert diese Gleichung einmal mit dem Richtungsvektor $\vec{u}$ und einmal mit $\vec{v}$. Da der Differenzvektor $\vec{d} = \vec{PQ}$ auf beiden Richtungsvektoren senkrecht steht gilt:

$$\vec{d} \circ \vec{u} = 0 \qquad \vec{d} \circ \vec{v} = 0$$

Das bedeutet, dass man jedes Mal eine Gleichung mit den zwei Unbekannten k_0 und r_0 auf der linken Seite und dem Wert Null auf der rechten Seite erhält.

Dieses Gleichungssystem kann gelöst werden. Mit den Werten der nun bekannten Parameter k_0 und r_0 werden die Koordinaten der Punkte P und Q ermittelt. Damit erhält man schließlich auch den gesuchten Abstand $d = |\vec{PQ}|$.

Übungsaufgabe

Bestimmen Sie den Abstand der beiden windschiefen Geraden g und h.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s_0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + t_0 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right] \\ \vec{d} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} + s_0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - t_0 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Multiplikation mit $\vec{u}$:

$$\vec{d} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s_0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - t_0 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0-10+5+s_0\cdot(0+1+1)-t_0\cdot(0+3-4) \\ 0 &= -5+2s_0+t_0 \quad (I) \end{aligned}$$

Multiplikation mit $\vec{v}$:

$$\vec{d}\circ\begin{pmatrix}4\\3\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-10\\5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4\\3\\-4\end{pmatrix}+s_0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4\\3\\-4\end{pmatrix}-t_0\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\-4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4\\3\\-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 12-30-20+s_0\cdot(0+3-4)-t_0\cdot(16+9+16) \\ 0 &= -38-s_0-41t_0 \quad (II) \end{aligned}$$

Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrcl} (I) & 0 &=& -5+2s_0+t_0 \\ 2\cdot(II) & 0 &=& -76-2s_0-82t_0 \\ \hline & 0 &=& -81-81t_0 \\ & & & \rightarrow \underline{t_0=-1} \end{array}$$

Aus (I) und $t_0=-1$ folgt: $\underline{s_0=3}$.

Die Werte von t_0 und s_0 werden in die Geradengleichungen von g und h eingesetzt. Damit erhält man die Koordinaten der Punkte P und Q:

$$P(-2|7|2) \qquad Q(5|3|6)$$

Damit kann der Abstand der Geraden ermittelt werden:

$$d=|\vec{q}-\vec{p}|=\sqrt{7^2+(-4)^2+4^2}=9$$

$\rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Der Abstand der Geraden beträgt 9 Längeneinheiten.}}}$

2. Möglichkeit

Verschiebt man den Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g in den Aufpunkt B der Geraden h, so entsteht mit dem Aufpunkt B und den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die Gleichung einer Ebene E_2 (siehe Abbildung 21). Natürlich kann dies auch mit dem Aufpunkt A und den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ durchgeführt werden, wodurch man E_1 erhält.

Da die Ebene E_2 stets parallel zur Geraden g liegt, ist auch der Abstand konstant. Wählt man als beliebigen Punkt der Geraden g den Aufpunkt A, so liegt wieder das gleiche Problem wie in 4.4.7 vor.

Abstand zweier windschiefer Geraden
Mit den beiden Richtungsvektoren der Geraden und einem Aufpunkt wird die Gleichung einer Ebene aufgestellt. Nun kann der Abstand des anderen Aufpunktes von dieser Ebene mit der Gleichung $d=\frac{n_1p_1+n_2p_2+n_3p_3+n_0}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}$ bestimmt werden.

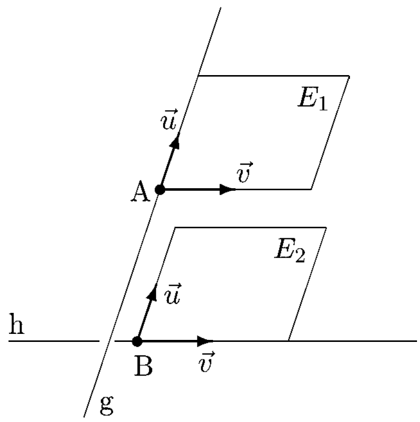

Abbildung 21: Abstand zweier windschiefer Geraden

Das Vorzeichen des Abstandes gibt an, ob der gewählte Punkt der einen Ebene auf der gleichen Seite der anderen Ebene liegt in die auch der Normalenvektor dieser anderen Ebene zeigt (dann ist das Ergebnis positiv), oder ob er auf der anderen Seite ist (Ergebnis negativ).

Übungsaufgabe

Bestimmen Sie den Abstand der beiden windschiefen Geraden g und h.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Aufstellen der Ebenengleichung:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Umformen in eine parameterfreie Gleichung:

$$\text{Normalenvektor der Ebene: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Multiplikation von E mit $\vec{n}$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}}_{0,\, da\, \vec{u} \perp \vec{n}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}}_{0,\, da\, \vec{v} \perp \vec{n}} \\ -7x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= -35 + 0 - 12 \end{aligned}$$

$$\rightarrow E : 7x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 47 = 0$$

Berechnung des Abstandes von Punkt $B(2|10|-2)$ zur Ebene E:

$$d = \frac{n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 + n_0}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$
$$d = \frac{7 \cdot 2 - 4 \cdot 10 + 4 \cdot (-2) - 47}{\sqrt{7^2 + (-4)^2 + 4^2}}$$
$$d = -9$$

$\rightarrow$ Der Abstand der Geraden beträgt 9 Längeneinheiten.

4.4.10 Abstand zweier Ebenen

Sind zwei Ebenen identisch oder schneiden sie sich beträgt die kleinste Entfernung zwischen ihnen stets Null. Folglich macht die Bestimmung des Abstand zweier Ebenen nur dann Sinn, wenn diese parallel zueinander liegen.

In diesem Fall kann das Problem aber auf die gleiche Aufgabenstellung wie bereits in Kapitel 4.4.7 und 4.4.9 reduziert werden.

Es wird nur noch ein beliebiger Punkt der einen Ebene betrachtet (der Einfachheit halber oft nur der Aufpunkt) und dessen Abstand zur anderen Ebene berechnet.

Abstand zweier Ebenen
Mit Hilfe der Abstandsformel $d = \frac{n_1p_1+n_2p_2+n_3p_3+n_0}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}$ wird die kürzeste Entfernung zwischen einem beliebigen Punkt der einen Ebene zur anderen Ebene berechnet.

Das Vorzeichen des Abstandes gibt an, ob der gewählte Punkt der einen Ebene auf der gleichen Seite der anderen Ebene liegt in die auch der Normalenvektor dieser anderen Ebene zeigt (dann ist das Ergebnis positiv), oder ob er auf der anderen Seite ist (Ergebnis negativ).

Übungsaufgabe

Berechnen Sie den Abstand der zwei parallelen Ebenen $E_1 : 7x_1+2x_2-x_3+3 = 0$ und $E_2 : -14x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2 = 0$.

Lösung:
Beliebigen Punkt P auf E_1 bestimmen. Dazu $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ frei wählen.

$$\rightarrow x_3 = 7 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3$$
$$x_3 = 5$$

Abstand von Punkt $P(0|1|5)$ zu E_2 berechenen:

$$\begin{aligned} d &= \frac{a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + a_4}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \\ d &= \frac{-14 \cdot 0 - 4 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 2}{\sqrt{(-14)^2 + (-4)^2 + 2^2}} \\ d &= 0,544 \end{aligned}$$

→ Der Abstand der Ebenen beträgt 0,544 Längeneinheiten.

4.4.11 Spiegelung eines Punktes

Will man einen Punkt P an einem Element (z. B. Gerade oder Ebene) spiegeln, so fällt man zunächst ein Lot vom Punkt P auf das Element und verlängert die Strecke $[PL]$ über den Fusspunkt L hinaus um die gleiche Länge wie sie bereits $[PL]$ hat.

Rechnerisch wird dabei auf die Ergebnisse aus den Kapiteln 4.4.5 bis 4.4.7 zurückgegriffen. Mit den dort hergeleiteten Formeln erhält man die Koordinaten des Lotfusspunktes L. Zusammen mit den Koordinaten des Punktes P kann sehr einfach der Vektor $\vec{PL} = \vec{p} - \vec{l}$ berechnet werden. Den Spiegelpunkt P' erhält man nun durch Vektoraddition von $\vec{l}$ und $\vec{PL}$.

Übungsaufgabe

Geben Sie die Koordinaten des Punktes ...
... P_1 an, der durch Spiegelung von P an g entsteht.
... P_2 an, der durch Spiegelung von P an E entsteht.

$$P(-2|-4|5)$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E : 2x_3 - 6 = 0$$

Lösung (P_1):

$$\begin{aligned} k &= \frac{(\vec{p} - \vec{a}) \circ \vec{u}}{\vec{u}^2} \\ &= \frac{\left[\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{l} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{p}_1 &= \vec{l} + \vec{PL} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Der Spiegelpunkt von P an g hat die Koordinaten $P_1(-2|-4|1)$.

Lösung (P_2):
Abstand von P zu E:

$$\begin{aligned}
d &= \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \\
&= \frac{0 \cdot (-2) + 0 \cdot (-4) + 2 \cdot 5 + (-6)}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2}} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Vektor von P zu L hat die Richtung von $-\vec{n}$ und die Länge von d. Daraus folgt der Lotfusspunkt:

$$\begin{aligned}
\vec{l} &= \vec{p} - \frac{d}{|\vec{n}|}\vec{n} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Berechnung des Spiegelpunktes:

$$\begin{aligned}
\vec{p}_1 &= \vec{l} + \vec{PL} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Der Spiegelpunkt von P an E hat die Koordinaten $P_2(-2|-4|1)$.

4.4.12 Winkel zwischen zwei Geraden

Da die Richtung einer Geraden durch ihren Richtungsvektor festgelegt wird, kann auch der Winkel zwischen zwei Geraden als der Zwischenwinkel der Richtungsvektoren berechnet werden.

Sind zwei Geraden im $\mathbf{R}^2$ in der parameterfreien Notation gegeben, so kann der Zwischenwinkel mit den beiden Normalenvektoren berechnet werden, da diese jeweils um 90° gegen den zugehörigen Richtungsvektor gedreht sind.

Der Winkel zwischen zwei Vektoren kommt jedoch bereits in zwei bekannten Formeln vor:
- Skalarprodukt: $\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$
- Vektorprodukt: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$

Benutzt man zur Berechnung die Formel des Skalarproduktes, so kann es je nach Orientierung der Richtungsvektoren (bzw. der Normalenvektoren) vorkommen, dass nicht der spitze, sondern der stumpfe Zwischenwinkel berechnet wird. Dies kann man jedoch leicht umgehen, wenn das Skalarprodukt in den Betrag genommen wird.

Winkel zwischen zwei Geraden
Der Schnittwinkel α zwischen zwei Geraden g und h im $\mathbf{R}^2$ oder $\mathbf{R}^3$ wird mit Hilfe der Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ (bzw. im $\mathbf{R}^2$ eventuell mit den Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$) berechnet:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \qquad 0° \leq \alpha \leq 180°$$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \qquad 0° \leq \alpha \leq 90°$$

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \qquad 0° \leq \alpha \leq 180°$$

$$\alpha^* = 180° - \alpha \qquad 0° \leq \alpha^* \leq 90°$$

Übungsaufgabe

Ermitteln Sie den Winkel zwischen den Geraden g_1 und g_2 bzw. g_3 und g_4.

$$g_1 : 4x_1 + x_2 - 5 = 0 \qquad g_2 : 9x_2 = 0$$

$$g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad g_4 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung (g_1 und g_2):

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Mit Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{81}} \\ &= \frac{9}{\sqrt{17} \cdot 9} \\ &\approx 0,242 \\ \rightarrow &\quad \underline{\underline{\alpha = 75,96^\circ}} \end{aligned}$$

Mit Vektorprodukt:

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{81}} \\ &= \frac{36}{\sqrt{17} \cdot 9} \\ &\approx 0,97 \\ \rightarrow &\quad \underline{\underline{\alpha = 75,96^\circ}} \end{aligned}$$

Lösung (g_3 und g_4):

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Mit Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{77}} \\ &= \frac{-16}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{77}} \\ &\approx -0,442 \\ \rightarrow &\quad \underline{\underline{\alpha = 116,25^\circ}} \end{aligned}$$

Mit Skalarprodukt (spitzer Winkel):

$$\cos\alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{77}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{|-16|}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{77}} \\ &\approx 0,442 \\ \rightarrow \quad & \underline{\underline{\alpha = 63,75^\circ}} \end{aligned}$$

Mit Vektorprodukt:

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{\left|\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{77}} \\ &= \frac{\sqrt{1053}}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{77}} \\ &\approx 0,879 \\ \rightarrow \quad & \underline{\underline{\alpha = 63,75^\circ}} \end{aligned}$$

4.4.13 Winkel zwischen Gerade und Ebene

Steht eine Gerade g nicht senkrecht auf einer Ebene E, und liegt sie nicht parallel dazu, kann man auch zwischen der Gerade und der Ebene einen Schnittwinkel berechnen.

Dazu folgende Überlegung:
Der Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden schließt mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene einen Winkel φ ein. Dieser Winkel zwischen den zwei Vektoren kann wie in Kapitel 4.4.12 gezeigt leicht berechnet werden:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} \qquad 0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$$

Der Winkel α zwischen der Ebene E und der Geraden ist jedoch der Ergänzungswinkel von φ auf 90°. Damit gilt:

$$\alpha + \varphi = 90^\circ \qquad \text{bzw.} \qquad \varphi = 90^\circ - \alpha$$

Des weiteren gelten die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \cos(90^\circ - \alpha) \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin\alpha \end{aligned}$$

Damit gilt für den Winkel zwischen der Geraden und der Ebene:

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} \qquad 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$$

Winkel zwischen Gerade und Ebene
Der Winkel zwischen einer Geraden g und einer Ebene E wird mit folgender Formel berechnet:

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} \qquad 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$$

Übungsaufgabe

Berechnen Sie den Winkel zwischen der Geraden g und der Ebene E.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad E : 4x_1 - 3x_2 - x_3 + 5 = 0$$

Lösung:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{91}} \\ &= \frac{26}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{91}} \\ &\approx 0{,}535 \\ \rightarrow \quad & \underline{\underline{\alpha = 32{,}31^\circ}} \end{aligned}$$

4.4.14 Winkel zwischen zwei Ebenen

Auch der Winkel zwischen zwei Ebenen kann dadurch ermittelt werden, dass der spitze Winkel zwischen den Normalenvektoren der Ebenen berechnet wird. Dies ist jedoch die gleiche Aufgabenstellung wie in Kapitel 4.4.12.

Winkel zwischen zwei Ebenen
Sind zwei Ebenen weder senkrecht noch parallel zueinander, so wird ihr Schnittwinkel als der spitze Winkel zwischen den zugehörigen Normalenvektoren festgelegt.

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \qquad 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$$

Ferner gilt:

- Sind E_1 und E_2 parallel zueinander, d. h. $\vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2$, so gilt $\alpha = 0°$.
- Stehen die Ebenen E_1 und E_2 dagegen senkrecht aufeinander, d. h. $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, dann gilt: $\alpha = 90°$.

Übungsaufgabe

Ermitteln Sie den Schnittwinkel der Ebenen $E_1 : x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 3 = 0$ und $E_2 : -2x_1 + x_3 + 4 = 0$.
Lösung:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{5}} \\ &\approx 0{,}052 \\ \rightarrow \quad & \underline{\underline{\alpha = 87{,}02°}} \end{aligned}$$