5 Die lineare (Un)Abhängigkeit von Vektoren

5.1 Zwei Vektoren

Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im $\mathbf{R^2}$ oder im $\mathbf{R^3}$.

Die formale Voraussetzung für lineare Unabhängigkeit dieser zwei Vektoren lautet:

$$k\vec{a} + l\vec{b} = \vec{0} \qquad \text{nur lösbar für:} \quad k = l = 0$$

Ein einfacher Nachweis für die lineare Unabhängigkeit ist jedoch, wenn folgende Aussage **nicht** erfüllt ist:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

5.2 Drei Vektoren

Gegeben seien drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, und $\vec{c}$ im $\mathbf{R^3}$ (Anmerkung: drei Vektoren sind im $\mathbf{R^2}$ immer linear abhängig!).

Die formale Voraussetzung für lineare Unabhängigkeit dieser drei Vektoren lautet:

$$k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c} = \vec{0} \qquad \text{nur lösbar für:} \quad k = l = m = 0 \tag{11}$$

5.2.1 Lösung mittels Determinante

Aus dem Ansatz $k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c} = \vec{0}$ kann eine Matrix aufgestellt werden, von welcher die Determinante berechnet werden muss:

$$DET \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

Ist der Wert dieser **Determinanten gleich Null**, so sind die drei Vektoren **linear abhängig**.

5.2.2 Lösung mittels Gaußschem Eliminationsverfahren

- Das Gaußsche Eliminationsverfahren ist eine Methode um Gleichungssysteme höheren Grades effizient zu lösen.
- Beim Gaußschen Eliminationsverfahren sind folgende Operationen erlaubt:
  - Vertauschung zweier Zeilen
  - Addition eines geeigneten Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

  - Multiplikation einer (kompletten) Zeile mit einer von Null verschiedenen Zahl

- Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind im $\mathbf{R^3}$ genau dann **linear unabhängig**, wenn aus dem Ansatz $k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c} = \vec{0}$ folgt, dass $k = l = m = 0$. Dies nennt man eine **triviale Lösung**.

- Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind im $\mathbf{R^3}$ genau dann **linear abhängig**, wenn beim Einsatz des Gaußschen Eliminationsverfahrens eine **Nullzeile** auftritt. D. h. es gibt unendlich viele Zahlentripel die das Gleichungssystem erfüllen. Dies nennt man eine **nichttriviale Lösung**.

Beispiel: Drei linear unabhängige Vektoren im $\mathbf{R^3}$

Gegeben seien die drei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lösung mittels der Determinante:

$$DET \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 8 - 3 + 2 - 6 + 6 = 4$$

$\rightarrow$ Die Determinante ist ungleich Null, damit sind die Vektoren lin. unabhängig.

Bei der **Lösung mittels des Gaußschen Eliminationsverfahrens** werden die Vektoren in Gleichung 11 eingesetzt:

$$k * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + l * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + m * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1k \\ 1k \\ 2k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2l \\ 1l \\ 3l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1m \\ 2m \\ -3m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das führt zum *homogenen Gleichungssystem* aus 3 Gleichungen und 3 Variablen k, l, m:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 1k & + & 2l & - & 1m & = & 0 \\ 1k & + & 1l & + & 2m & = & 0 \\ 2k & + & 3l & - & 3m & = & 0 \end{array}$$

Daraus wird mittels des Gaußschen Eliminationsverfahrens die *Diagonalform* (vgl. Gleichung 2) gebildet.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2 & - & 1 & = & 0 \\ 1 & + & 1 & + & 2 & = & 0 \\ 2 & + & 3 & - & 3 & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k=0 \\ l=0 \\ m=0 \end{array} \right.$$

→ Damit ist bewiesen, dass die Gleichung $k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c} = \vec{0}$ nur dann erfüllt werden kann, wenn alle drei Parameter k, l, m den Wert Null haben. Das bedeutet, dass die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig sind.

→ Das Gleichungssystem kann bereits mit der Dreiecksform (erreicht in der vierten 'Stufe') gelöst werden.

Beispiel: Drei linear abhängige Vektoren im $\mathbf{R}^3$

Geg.:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Betrachtet man jeweils nur zwei Vektoren, so sind diese linear unabhängig voneinander! Läge hier bereits eine Abhängigkeit vor, dann müsste der Fall für alle drei Vektoren nicht mehr weiter betrachtet werden.

Lösung mittels der Determinante:

$$DET \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 40 + 9 - 6 - 36 - 12 + 5 = 0$$

→ Die Determinante ist gleich Null, damit sind die Vektoren lin. abhängig.

Bei der **Lösung mittels des Gaußschen Eliminationsverfahrens** werden die Vektoren in Gleichung 11 eingesetzt:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & - & 1 & + & 3 & = & 0 \\ 1 & + & 4 & - & 3 & = & 0 \\ 3 & - & 2 & + & 5 & = & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & -14 & 14 & 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & 14 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

→ Diese letzte Zeile bedeutet: $0 * k + 0 * l + 0 * m = 0$
Daran kann man erkennen, dass man für die Variablen k, l, m jeden beliebigen Wert einsetzen kann, und die Gleichung ist stets erfüllt.

→ Das Auftreten einer Nullzeile bedeutet, dass eine Variable frei gewählt werden kann. Dies nennt man eine *nichttriviale Lösung*. Folglich sind die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ linear abhängig.

5.2.3 Übungsaufgaben

Man untersuche die folgenden Vektoren mittels des Gaußschen Eliminationsverfahrens auf lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit.

$$\textbf{a)}\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{b)}\quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösungen:
a)Sie sind linear abhängig
b) Sie sind linear unabhängig