6 Darstellungsformen von Geradengleichungen

6.1 Parametergleichung einer Geraden

Parametergleichung einer Geraden (Punkt-Richtungs-Form):

Definition: Eine Gerade g wird durch einen Punkt und einen freien Vektor festgelegt. Sie ist die Menge aller Punkte X mit dem Ortsvektor $\vec{x}$, für die gilt (vgl. Abbildung 22):

$$\vec{x} = \vec{a} + k * \vec{u} \qquad \text{, wobei} \quad \vec{u} \neq \vec{0} \quad \text{und} \quad k \in \mathbf{R}$$

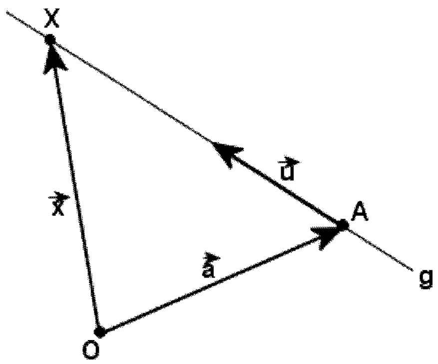

Abbildung 22: Darstellung einer Geraden durch Aufpunkt und Richtungsvektor

Da $k \in \mathbf{R}$ können verschiedene Wertebereiche von k unterschieden werden:

- $-\infty < k < 0$: Halbgerade vom Aufpunkt in negativer Richtung des Richtungsvektors. Ist als untere Grenze nicht $-\infty$ sondern ein fester Wert vorgegeben, dann handelt es sich um eine Strecke.
- $k = 0$: Es wird keine Gerade festgelegt, da der Richtungsvektor keine Länge mehr vorgibt.
- $0 < k < \infty$: Halbgerade vom Aufpunkt in positiver Richtung des Richtungsvektors. Ist als obere Grenze nicht ∞ sondern ein fester Wert vorgegeben, dann handelt es sich um eine Strecke.

→ Man kann sagen, dass jedem Punkt X der Geraden g genau ein Parameterwert k entspricht und umgekehrt!

Beispiel

Aufgabe:
Geben sie die Geradengleichung der Geraden g an, welche durch den Punkt A und den freien Vektor $\vec{u}$ gegeben ist.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2,5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$g : \vec{x} = \vec{a} + k * \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + k * \begin{pmatrix} 5 \\ 2,5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

6.2 Normalenform einer Geraden

Die bereits eingeführte Parameterdarstellung einer Geraden ist leider nicht eindeutig, da zwar stets der gleiche Aufpunkt verwendet werden muss, aber der Richtungsvektor nicht eindeutig ist (es könnte auch ein paralleler eingesetzt werden!). Hier hilft die Normalenform $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3 = 0$ einer Geraden weiter.

Achtung: Die Normalenform einer Geraden gibt es **nur** im $\mathbf{R^2}$ und **nicht** im $\mathbf{R^3}$**!**

Um die Normalenform aufzustellen gibt es zwei Wege:

- durch geeignete Addition der Zeilen der Geradengleichung in Parameterform
- durch skalare Multiplikation der Geradengleichung in Parameterform mit einem zum Richtungsvektor senkrechten Vektor

Aufstellen der Achsenabschnittsform durch Zeilenaddition

Gegeben sei die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Zeilenweises anschreiben der Geradengleichung

$$\begin{array}{lrcl} (I) & x_1 & = & 2 + 3k \\ (II) & x_2 & = & 1 - k \end{array}$$

- Geeignete Addition der Zeilen

$$\begin{array}{lrcl} (I) & x_1 & = & 2 + 3k \\ 3 * (II) & 3x_2 & = & 3 - 3k \\ \hline & x_1 + 3x_2 & = & 5 \end{array}$$

- Ablesen der parameterfreien Geradengleichung

$$\rightarrow \underline{\underline{x_1 + 3x_2 - 5 = 0}}$$

Aufstellen der Achsenabschnittsform durch Skalarmultiplikation

Gegeben sei die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Aufstellen der Geradengleichung in Parameterform (hier ist diese schon gegeben).
- Zum Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ den senkrechten Vektor (=Normalenvektor) $\vec{v}_\perp = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$ bilden. Dies geschieht durch Vertauschung der beiden Koordinaten und einen Vorzeichenwechsel bei einer Koordinate.
- Multiplikation der Geradengleichung in Parameterform mit dem Normalenvektor.

$$g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 3 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + \underbrace{k \cdot 3 \cdot 1 + k \cdot (-1) \cdot 3}_{\vec{v} \cdot \vec{v}_\perp = 0}$$

- Zusammenfassen zur parameterfreien Geradengleichung

$$\rightarrow \underline{\underline{x_1 + 3x_2 - 5 = 0}}$$

6.3 Gerade in Achsenabschnittsform

Ausgehend von einer Geraden in parameterfreier Darstellung können folgende Umformungen durchgeführt werden:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3 = 0$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 = -a_4$$
$$\frac{a_1}{-a_4}x_1 + \frac{a_2}{-a_4}x_2 = 1$$
$$\frac{x_1}{\frac{-a_4}{a_1}} + \frac{x_2}{\frac{-a_4}{a_2}} = 1$$

Durch Substitution der Brüche im Nenner erhält man:

$$\frac{x_1}{s} + \frac{x_2}{t} = 1$$

Ferner weiß man, dass ein Punkt auf einer Koordinatenachse stets zwei Koordinaten mit dem Wert Null hat. Geht man nun von der x_1-Achse aus, und setzt die andere Koordinaten $x_2 = 0$, so erhält man eine Gleichung der Form

$$\frac{x_1}{s} + 0 = 1 \qquad \text{oder umgeformt: } x_1 = s$$

Das bedeutet aber, dass die x_1 Koordinate den Wert s hat, sobald die andere Koordinate $x_2 = 0$. Dieser Punkt $S(s \mid 0)$ liegt genau auf der x_1-Achse. Den Wert für s braucht man jedoch nicht erst herzuleiten, da er bereits im Nenner der obigen Gleichung steht. Ebenso kann der Schnittpunkt der Geraden mit der x_2-Achse ($T(0 \mid t)$) abgelesen werden.

Da durch Ablesen der Nenner in den Brüchen bereits die Koordinaten der Achsenschnittpunkte mit der Geraden angegeben werden können, nennt man diese Form der Geradengleichung *Achsenabschnittsform.*

Ist eine Gerade jedoch nicht in parameterfreier, sondern in Parameterform gegeben, so müssen die Achsenabschnittspunkte durch Schnitte der Geraden mit den Geraden der Koordinatenachsen ermittelt werden.

6.3.1 Beispiele für Geraden in Achsenabschnittsform

Gerade schneidet beide Achsen

Aufgabe:
Gegeben sei die Gerade $g : 2x_1+x_2-2 = 0$. Bestimmen sie die Achsenabschnitte.

Lösung:
Gerade in Achsenabschnittsform:

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} = 1$$

$$\rightarrow \underline{\underline{S(1 \mid 0)}} \qquad \underline{\underline{T(0 \mid 2)}}$$

Gerade parallel zu einer Achse

Aufgabe:
Gegeben sei die Gerade $g : -7x_2 - 3 = 0$. Bestimmen sie die Achsenabschnitte.

Lösung:
Gerade in Achsenabschnittsform:

$$\frac{x_2}{-\frac{3}{7}} = 1$$

$$\rightarrow \underline{\underline{T(0 \mid -\frac{3}{7})}}$$

Einen Punkt S gibt es nicht, da g parallel zur x_1-Achse verläuft.

Gerade durch den Ursprung

Aufgabe:
Gegeben sei die Gerade $g : -x_1 + x_2 = 0$. Bestimmen sie die Achsenabschnitte.

Lösung:
Hier kann keine Achsenabschnittsform angegeben werden, da eine Division durch Null ($a_3 = 0$) durchgeführt werden müsste. Anschaulich gesprochen: Die Gerade schneidet beide Koordinatenachsen im Ursprung.

Gerade liegt auf der Achse

Aufgabe:
Gegeben sei die Gerade $g : x_2 = 0$. Bestimmen sie die Achsenabschnitte.

Lösung:
Hier kann keine Achsenabschnittsform angegeben werden, da eine Division durch Null ($a_3 = 0$) durchgeführt werden müsste. Anschaulich gesprochen: Die Gerade liegt auf der x_1-Achse, und hat damit mit keiner Achse einen eindeutigen Schnittpunkt.