7 Darstellungsformen von Ebenengleichungen

Es gibt folgende Alternativen um eine Ebene im Raum eindeutig zu beschreiben:

- **Punkt-Richtungs-Form:** D. h. man hat einen Aufpunkt und zwei linear unabhängige Richtungsvektoren
- **Drei-Punkte-Form:** D. h. es sind drei Punkte gegeben, welche nicht auf einer Geraden liegen
- **Zwei sich schneidende Geraden:** Es muss sichergestellt sein, dass sich die Geraden auch wirklich schneiden!
- **Ein Punkt und eine Gerade:** Hier muss untersucht werden, ob der Punkt wirklich kein Element der Geraden ist.
- **Zwei parallele Geraden:** Der Schüler in der Lage sein zu prüfen, ob die Richtungsvektoren der Geraden wirklich kolinear sind.

7.1 Ebene in Punkt-Richtungs-Form

Es seien ein Aufpunkt A und zwei unabhängige Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gegeben. Zunächst hat eine Prüfung zu erfolgen, ob $\vec{u}$ und $\vec{v}$ wirklich linear unabhängig sind.
Dazu darf folgende Bedingung nicht erfüllt sein:

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$$

Setzen beide Richtungsvektoren im Aufpunkt an, spannen die Richtungsvektoren die Ebene E auf (siehe Abbildung 23). Für jeden Punkt X dieser Ebene gilt nun:

$$\vec{AX} = k\vec{u} + l\vec{v}$$

Berücksichtigt man weiter den Zusammenhang $\vec{OX} = \vec{OA} + \vec{AX}$, so folgt:

Punkt-Richtungs-Form einer Ebene:

$$E : \vec{x} = \vec{a} + k\vec{u} + l\vec{v} \qquad k, l \in \mathbf{R}$$

Mit den Schülern sollen folgende Fälle diskutiert werden:

- $k \in \mathbf{R}^+$: Dann wird keine Ebene, sondern eine Halbebene aufgespannt, welche durch die Gerade h begrenzt wird.
- $k, l \in \mathbf{R}^+$: Es wird keine vollständige Ebene sondern ein Sektor aufgespannt.

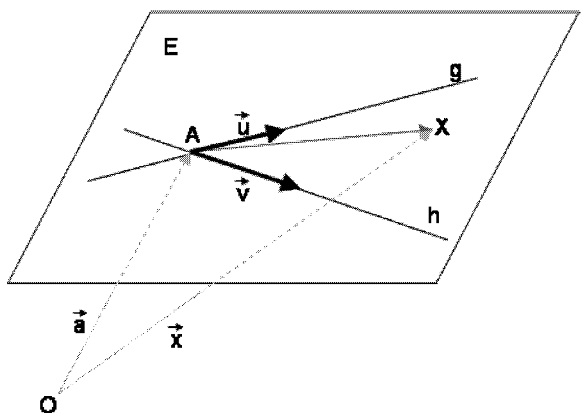

Abbildung 23: Ebene in Punkt-Richtungs-Form

Beispiel

Aufgabe:
Geben sie eine Gleichung der Ebene E an, welche durch $P, \vec{u}$ und $\vec{v}$ gebildet wird.

$$\text{Aufpunkt } P(3 \mid -1 \mid 4)$$

$$\text{Richtungsvektoren } \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\vec{x} = \vec{p} + k\vec{u} + l\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad k, l \in \mathbf{R}$$

7.2 Ebene in Drei-Punkte-Form

Gegeben seien drei beliebige Punkte A, B, C.

Zunächst muss überprüft werden ob diese drei Punkte auf einer Geraden liegen. Dazu wird mit zwei Ortsvektoren zunächst eine Geradengleichung bestimmt, und dann untersucht ob der dritte Punkt ein Element dieser Geraden ist. Um eine Ebene bestimmen zu können muss gelten:

$$\vec{c} \neq \vec{a} + k(\vec{b} - \vec{a})$$

Ist diese Bedingung erfüllt, gilt für den Ortsvektor $\vec{x} = \vec{OX}$ eines beliebigen Punktes $X \in E$ (siehe Abbildung 24):

$$\vec{OX} = \vec{OA} + \vec{AX} \quad \text{und} \quad \vec{AX} = k \cdot \vec{AB} + l \cdot \vec{AC}$$

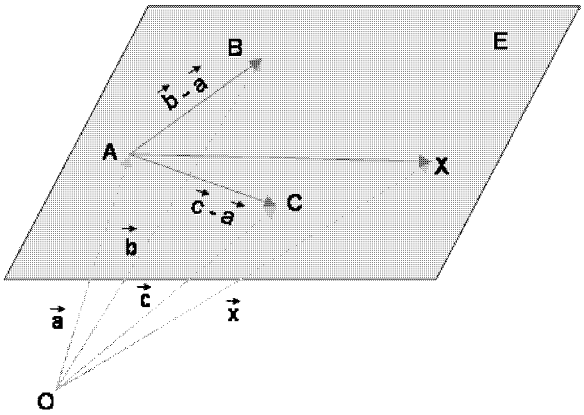

Abbildung 24: Ebene in Drei-Punkte-Form

Daraus folgt:

Drei-Punkte-Form einer Ebene:

$$E : \vec{x} = \vec{a} + k(\vec{b} - \vec{a}) + l(\vec{c} - \vec{a}) \qquad k, l \in \mathbf{R}$$

Die Schüler werden darauf hingewiesen, dass es die Punkt-Richtungs-Form und die Drei-Punkte-Form lediglich in der Art der Angaben unterscheiden. Durch jeweils zwei Ortsvektoren kann ein freier Vektor berechnet werden. D. h. man kann sich aus den Angaben bei der Drei-Punkte-Form die Vorgaben einer Punkt-Richtungs-Form errechnen:

Aufpunkt: A Richtungsvekoren: $\vec{u} = \vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{v} = \vec{c} - \vec{a}$

Beispiel

Aufgabe:
Geben sie eine Gleichung der Ebene E an, welche durch die Punkte A, F und G aufgespannt wird.

$$A(4 \mid -7{,}5 \mid 12) \quad F(18 \mid 0 \mid 0) \quad G(-6 \mid -3 \mid -1{,}5)$$

Lösung:
Zunächst wird überprüft ob die Punkte auf einer Geraden liegen:

$$g : \vec{x} = \vec{f} + k(\vec{g} - \vec{f})$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -7,5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -1,5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} 4 & = & 18-6k \\ -7,5 & = & 0-3k \\ 12 & = & 0-1,5k \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} k=\frac{7}{3} \\ k=2,5 \\ k=-8 \end{array} \right\} \Rightarrow A \notin g$$

Da die Punkte nicht auf einer Geraden liegen kann nun die Ebene berechnet werden:

$$E: \vec{x} = \vec{a} + k(\vec{f} - \vec{a}) + l(\vec{g} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 4 \\ -7,5 \\ 12 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 14 \\ 7,5 \\ -12 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -10 \\ 4,5 \\ -13,5 \end{pmatrix}$$

7.3 Ebene durch zwei sich schneidende Geraden

Gegeben seien zwei sich schneidende Geraden g und h (siehe Abbildung 25). Da die Schüler die Beziehungen zwischen Geraden noch nicht berechnen können, wird hier vorausgesetzt dass diese sich schneiden.

$$g: \vec{x} = \vec{a} + k\vec{u}$$

$$h: \vec{x} = \vec{b} + l\vec{v}$$

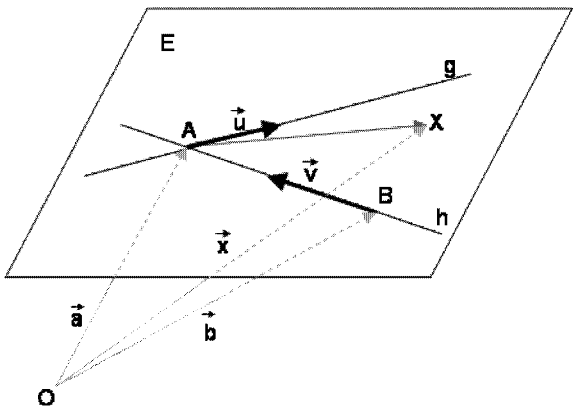

Abbildung 25: Ebene durch zwei sich schneidende Geraden

Mit den Schülern wird erarbeitet dass zur Erstellung der Ebenengleichung nur einer der zwei Aufpunkte A bzw. B benötigt wird. Des weiteren kann der Richtungsvektor einer Geraden beliebig auf dieser verschoben werden (Stichwort: freier Vektor).

Damit verfügt man jedoch wieder über die gleichen Ausgangsinformationen wie bei der Punkt-Richtungs-Form.

Ebene durch zwei sich schneidende Geraden:

$$E : \vec{x} = \vec{a} + k\vec{u} + l\vec{v} \qquad k, l \in \mathbf{R}$$

oder gleichwertig:

$$E : \vec{x} = \vec{b} + k\vec{u} + l\vec{v} \qquad k, l \in \mathbf{R}$$

Beispiel

Aufgabe:
Geben sie eine Gleichung der Ebene E an, welche durch die sich schneidenden Geraden g und h festgelegt wird.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 14,5 \\ -4 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Entweder:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

oder gleichwertig:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 14,5 \\ -4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

7.4 Ebene durch einen Punkt und eine Gerade

Eine Ebene lässt sich auch durch eine Gerade $g : \vec{x} = \vec{a} + k\vec{u}$ und einen Punkt B, der nicht auf dieser Geraden liegt, eindeutig beschreiben (siehe Abbildung 26).

Zunächst ist zu prüfen, ob $B \notin g$. Dafür muss der Richtungsvektor $\vec{u}$ linear unabhängig vom freien Vektor $\vec{AB}$ sein. Also darf nicht gelten:

$$\frac{u_1}{b_1 - a_1} = \frac{u_2}{b_2 - a_2} = \frac{u_3}{b_3 - a_3}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, gilt für den Ortsvektor $\vec{x}$ jedes beliebigen Punktes X der Ebene E:

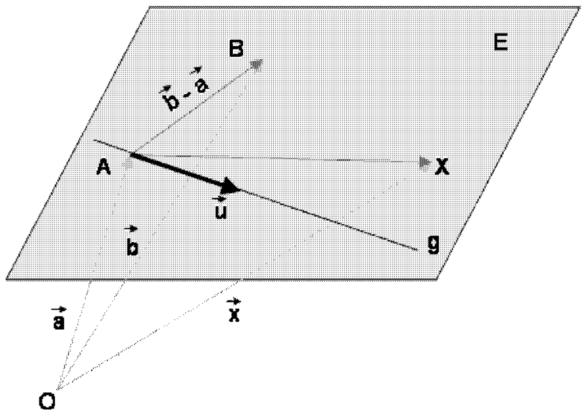

Abbildung 26: Ebene durch einen Punkt und eine Gerade

Ebene durch einen Punkt und eine Gerade:

$$E : \vec{x} = \vec{a} + k\vec{u} + l(\vec{b} - \vec{a}) \qquad k, l \in \mathbf{R}$$

Dies bedeutet, dass aus den Ortsvektoren des Aufpunktes der Geraden und des Punktes B ein freier Vektor berechnet wurde. Zusammen mit dem Richtungsvektor der Geraden stehen damit wieder zwei Richtungsvektoren und ein Aufpunkt zur Verfügung. Dies entspricht den Vorgaben aus der Punkt-Richtungs-Form.

Beispiel

Aufgabe:
Formulieren sie eine Gleichung der Ebene E, welche durch den Punkt D und die Gerade h gebildet wird.

Geg.: Punkt $D(19 \mid -2 \mid 8)$ und Gerade $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$E : \vec{x} = \vec{a} + k\vec{u} + l(\vec{d} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

7.5 Ebene durch zwei parallele Geraden

Gegeben seien zwei Geraden $g : \vec{x} = \vec{a} + k\vec{u}$ und $h : \vec{x} = \vec{b} + l\vec{v}$. Zunächst muss geprüft werden, ob die Geraden wirklich parallel verlaufen. Dazu muss gelten:

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, kann man sich einen weiteren, linear unabhängigen, freien Vektor berechnen. Dieser ist am einfachsten als Vektor zwischen den zwei Aufpunkten A und B zu bestimmen (siehe Abbildung 27).

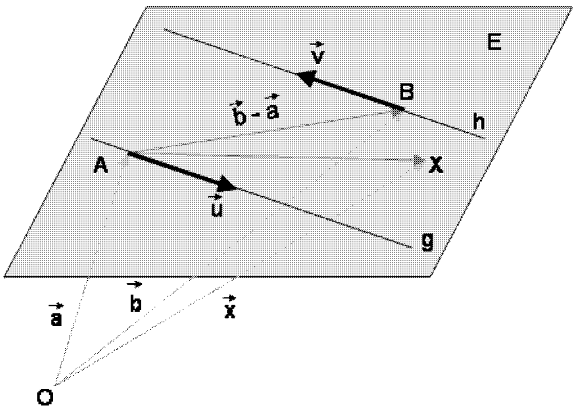

Abbildung 27: Ebene durch zwei parallele Geraden

Ebene durch zwei parallele Geraden:

$$E : \vec{x} = \vec{a} + k\vec{u} + l(\vec{b} - \vec{a}) \qquad k, l \in \mathbf{R}$$

oder gleichwertig:

$$E : \vec{x} = \vec{b} + k\vec{v} + l(\vec{a} - \vec{b}) \qquad k, l \in \mathbf{R}$$

Durch das bestimmen eines weiteren, linear unabhängigen Vektors $\vec{b} - \vec{a}$ (bzw. $\vec{a} - \vec{b}$) erhält man erneut die gleiche Ausgangssituation wie bei der Punkt-Richtungs-Form.

Beispiel

Aufgabe:
Geben sie eine Gleichung der Ebene E, welche durch die zwei Geraden g und

h bestimmt wird an.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3,5 \\ -17 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 13,5 \\ -3 \\ -2,25 \end{pmatrix}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3,5 \\ -1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Zunächst wird überprüft, ob die Geraden g und h parallel sind:

$$\begin{pmatrix} 13,5 \\ -3 \\ -2,25 \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} 13,5 & = & -9m \\ -3 & = & 2m \\ -2,25 & = & 1,5m \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} m & = & -1,5 \\ m & = & -1,5 \\ m & = & -1,5 \end{array}\right\} \Rightarrow g \parallel h$$

Nun kann die Gleichung für die Ebene aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} E : \vec{x} &= \vec{a} + k \cdot \vec{u} + l \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \begin{pmatrix} 12 \\ -3,5 \\ -17 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 13,5 \\ -3 \\ -2,25 \end{pmatrix} + l \cdot (\begin{pmatrix} 1,5 \\ 3,5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ -3,5 \\ -17 \end{pmatrix}) \\ &= \begin{pmatrix} 12 \\ -3,5 \\ -17 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 13,5 \\ -3 \\ -2,25 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -10,5 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Oder gleichwertig:

$$\begin{aligned} E : \vec{x} &= \vec{b} + k \cdot \vec{v} + l \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3,5 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} + l \cdot (\begin{pmatrix} 12 \\ -3,5 \\ -17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3,5 \\ -1 \end{pmatrix}) \\ &= \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3,5 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 10,5 \\ -7 \\ -16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7.6 Übungsaufgaben

Aufgaben

Geben sie bei jeder Teilaufgabe eine Gleichung der Ebene E an, welche durch die gegebenen Elemente gebildet wird:

1. Punkt $A(5 \mid 2{,}3 \mid -9)$, Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Drei Punkte $A(5 \mid -3 \mid 4)$, $B(7 \mid 1{,}5 \mid 3{,}5)$ und $C(-4 \mid -4 \mid -4)$

3. Punkt $P(-12 \mid 1 \mid 7)$, Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}$

4. Zwei sich schneidenden Geraden
$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

5. Zwei parallele Geraden
$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -17{,}5 \\ -7 \\ 28 \end{pmatrix}$

Lösungen

1. E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2{,}3 \\ -9 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Mit A als Aufpunkt: $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$

3. E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -21 \\ -3{,}5 \\ 7 \end{pmatrix}$

4. E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

5. E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$

7.7 Ebenen in parameterfreier Darstellung (Normalenform)

Die parameterfreie Darstellung $E: a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0$ einer Ebene im $\mathbf{R}^3$ erreicht man entweder mit Hilfe des Vektorproduktes (vgl. Kapitel 4) oder folgendermaßen:

- Aufstellen der Gleichung in Parameterdarstellung.
- Daraus das zugehörige Gleichungssystem formulieren.
- Aus zwei Zeilen die Parameter k und l bestimmen.
- Werte von k und l in die dritte Gleichung einsetzen.

Beispiel

Durch die drei Punkte $A(2 \mid 1 \mid -1), B(3 \mid 0 \mid -2)$ und $C(-1 \mid 2 \mid 3)$ sei eine Ebene gegeben.

- Aufstellen der Ebenengleichung in Parameterdarstellung:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Formulieren des zugehörigen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rl} (I) & x_1 = 2 + k - 3l \\ (II) & x_2 = 1 - k + l \\ (III) & x_3 = -1 - k + 4l \end{array}$$

- Berechnen von k und l aus zwei Gleichungen:

$$\begin{array}{crccc} (I) & x_1 = 2 & +k & -3l \\ (II) & x_2 = 1 & -k & +l \\ \hline \sum & x_1 + x_2 = 3 & & -2l \end{array}$$

$\rightarrow l = \frac{1}{2} \cdot (3 - x_1 - x_2)$

$$\begin{array}{crccc} (I) & x_1 = 2 & +k & -3l \\ 3 \cdot (II) & 3x_2 = 3 & -3k & +3l \\ \hline \sum & x_1 + 3x_2 = 5 & -2k & \end{array}$$

$\rightarrow k = \frac{1}{2} \cdot (5 - x_1 - 3x_2)$

- Einsetzen von k und l in die dritte Gleichung:

$$x_3 = -1 - \frac{1}{2}(5 - x_1 - 3x_2) + 2(3 - x_1 - x_2)$$

$$\rightarrow \qquad E: 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5 = 0$$

Hinweis: Sollte der Koeffizient a_3 gleich Null sein, so ist die parameterfreie Gleichung der Ebene im $\mathbf{R^3}$ nicht mehr von einer parameterfreien Geradengleichung im $\mathbf{R^2}$ zu unterscheiden. Es muss also in der Aufgabenstellung angegeben sein um was es sich handelt, oder in welcher Dimension ($\mathbf{R^2}$ oder $\mathbf{R^3}$) man rechnet.
Abbildung 28 auf Seite 79 gibt eine Übersicht über die jeweilige Lage einer Ebene $E: a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0$ in parameterfreier Darstellung falls einer oder mehrere der Koeffizienten Null sein sollten.

7.7.1 Beispiele für besondere Lagen von Ebenen in parameterfreier Darstellung

Ebene senkrecht zur x_1x_2-Ebene, enthält den Ursprung

Aufgabe: Stellen sie eine parameterfreie Gleichung der Ebene E auf, die durch den Aufpunkt P und die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gebildet wird.

$$P(0\,|\,0\,|\,1) \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

- Parametergleichung der Ebene aufstellen:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Aus der Parametergleichung der Ebene erhält man:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & x_1 = -k + l \\ \text{(II)} & x_2 = 2k - 2l \\ \text{(III)} & x_3 = 1 + k + 2l \end{array}$$

- Multipliziert man (I) mit dem Faktor 2 und addiert ihn zu (II) erhält man:

$$2x_1 + x_2 = 0$$

  Dies ist bereits die Ebenengleichung.

→ Man erkennt, dass x_3 beliebig sein darf (Achtung: das heißt **nicht** $x_3 = 0$, **sondern** $a_3 = 0$). Das bedeutet, dass die Ebene parallel zur x_3-Achse verläuft.
→ Falls der Koeffizient $a_4 = 0$, dann ist der Koordinatenursprung stets ein Element der Ebene.

Ebene parallel zur x_2x_3-Ebene

Aufgabe: Stellen sie eine parameterfreie Gleichung der Ebene E auf, die durch den Aufpunkt P und die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gebildet wird.

$$P(1 \mid 0 \mid 0) \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

- Parametergleichung der Ebene aufstellen:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Aus der Parametergleichung der Ebene erhält man:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & x_1 = 1 \\ \text{(II)} & x_2 = k \\ \text{(III)} & x_3 = l \end{array}$$

- Da man eine Ebenengleichung ohne die Parameter k und l benötigt, kann man das Ergebnis bereits in (I) ablesen:

$$x_1 - 1 = 0$$

→ Man erkennt, dass x_2 und x_3 beliebig sein dürfen. Das bedeutet, dass die Ebene parallel zur x_2x_3-Ebene verläuft.

Ebene ist die x_1x_3-Ebene

Aufgabe: Stellen sie eine parameterfreie Gleichung der Ebene E auf, die durch den Aufpunkt P und die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gebildet wird.

$$P(1 \mid 0 \mid 1) \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

- Parametergleichung der Ebene aufstellen:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Aus der Parametergleichung der Ebene erhält man:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & x_1 = 1 + k \\ \text{(II)} & x_2 = 0 \\ \text{(III)} & x_3 = 1 + l \end{array}$$

- Da man eine Ebenengleichung ohne die Parameter k und l benötigt, kann man das Ergebnis bereits in (II) ablesen:

$$x_2 = 0$$

→ Man erkennt zunächst, dass x_1 und x_3 beliebig sein dürfen. Das bedeutet, dass die Ebene parallel zur x_1x_3-Ebene verläuft.
→ Ferner sieht man dass $a_4 = 0$. Das bedeutet dass der Ursprung ein Element der Ebene ist. Also liegt die Ebene nicht parallel, sondern in der x_1x_3-Ebene.

7.8 Ebene in Achsenabschnittsform

Ausgehend von einer Ebene in parameterfreier Darstellung (=Normalenform) können folgende Umformungen durchgeführt werden:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0$$

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= -a_4 \\ \frac{a_1}{-a_4}x_1 + \frac{a_2}{-a_4}x_2 + \frac{a_3}{-a_4}x_3 &= 1 \\ \frac{x_1}{\frac{-a_4}{a_1}} + \frac{x_2}{\frac{-a_4}{a_2}} + \frac{x_3}{\frac{-a_4}{a_3}} &= 1 \end{aligned}$$

Durch Substitution der Brüche im Nenner erhält man:

$$\frac{x_1}{s} + \frac{x_2}{t} + \frac{x_3}{u} = 1$$

Ferner weiß man, dass ein Punkt auf einer Koordinatenachse stets zwei Koordinaten mit dem Wert Null hat. Geht man nun von der x_1-Achse aus, und setzt man die Koordinaten x_2 und x_3 zu Null, so erhält man eine Gleichung der Form

$$\frac{x_1}{s} + 0 + 0 = 1 \qquad \text{oder umgeformt: } x_1 = s$$

Das bedeutet aber, dass die x_1 Koordinate den Wert s hat, sobald die anderen Koordinaten $x_2 = x_3 = 0$. Dieser Punkt $S(s \mid 0 \mid 0)$ liegt genau auf der x_1-Achse. Den Wert für s braucht man jedoch nicht erst herzuleiten, da er bereits im Nenner der obigen Gleichung steht. Ebenso kann jeweils der Schnittpunkt der Ebene mit der x_2-Achse ($T(0 \mid t \mid 0)$) bzw. der x_3-Achse ($U(0 \mid 0 \mid u)$) abgelesen werden.

Da durch Ablesen der Nenner in den Brüchen bereits die Koordinaten der Achsenschnittpunkte mit der Ebene angegeben werden können, nennt man diese Form der Ebenengleichung *Achsenabschnittsform*.

Ist eine Ebene jedoch nicht in Normalenform, sondern in Parameterform gegeben, so müssen die Achsenabschnittspunkte durch Schnitte der Ebene mit den Geraden der Koordinatenachsen ermittelt werden.

7.8.1 Beispiele für Ebenen in Achsenabschnittsform

Ebene in Normalenform (1)

Aufgabe:
Gegeben sei die Ebene $E : 3x_1+2x_2-11x_3-3 = 0$. Geben sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen an.

Lösung:

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 + (-\frac{11}{3})x_3 = 1$$
$$x_1 + \frac{x_2}{\frac{3}{2}} + \frac{x_3}{-\frac{3}{11}} = 1$$

$\rightarrow$ Achsenabschnittspunkte: $S(1 \mid 0 \mid 0)$ $\quad T(0 \mid \frac{3}{2} \mid 0)$ $\quad U(0 \mid 0 \mid -\frac{3}{11})$

Ebene in Normalenform (2)

Aufgabe:
Gegeben sei die Ebene $E : -x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0$. Geben sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen an.

Lösung:
Hier kann keine Achsenabschnittsform angegeben werden, da eine Division durch Null ($a_4 = 0$) durchgeführt werden müsste. Anschaulich gesprochen: Die Ebene schneidet alle drei Koordinatenachsen im Ursprung.

Ebene in Normalenform (3)

Aufgabe:
Gegeben sei die Ebene $E : x_2 + 3x_3 - 2 = 0$. Geben sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen an.

Lösung:

$$\frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{\frac{2}{3}} = 1$$

$\rightarrow$ Achsenabschnittspunkte: $T(0 \mid 2 \mid 0)$ $\quad U(0 \mid 0 \mid \frac{2}{3})$

Es gibt keinen Achsenabschnittspunkt S auf der x_1-Achse, da die Ebene parallel dazu verläuft.

Ebene in Parameterdarstellung

Aufgabe:
Gegeben sei die Ebene E. Geben sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen an.

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

- **Schnitt mit x_1-Achse**

$$\text{Gerade der } x_1\text{-Achse:} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -10 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} r = 1 + 2k + l = -\frac{5}{3} \\ k = -3 - l = \frac{1}{3} \\ l = -\frac{3}{10} \end{array} \right.$$

k und l in Ebenengleichung:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{3}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \underline{\underline{S(-\frac{5}{3} \mid 0 \mid 0)}}$$

- **Schnitt mit x_2-Achse**

$$\text{Gerade der } x_2\text{-Achse:} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \left\{ \begin{array}{l} r=\frac{5}{2} \\ k=-\frac{1}{2} \\ l=0 \end{array} \right.$$

r in Geradengleichung:

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \underline{\underline{T(0 \mid \frac{5}{2} \mid 0)}}$$

- **Schnitt mit x_3-Achse**

$$\text{Gerade der } x_3\text{-Achse:} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & -1 & 2 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \left\{ \begin{array}{l} r=5 \\ k=2 \\ l=-5 \end{array} \right.$$

r in Geradengleichung:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \underline{\underline{U(0 \mid 0 \mid 5)}}$$

$\Rightarrow$ Achsenabschnittsform der Ebene:

$$\underline{\underline{\frac{x_1}{-\frac{5}{3}} + \frac{x_2}{\frac{5}{2}} + \frac{x_3}{5} = 1}}$$

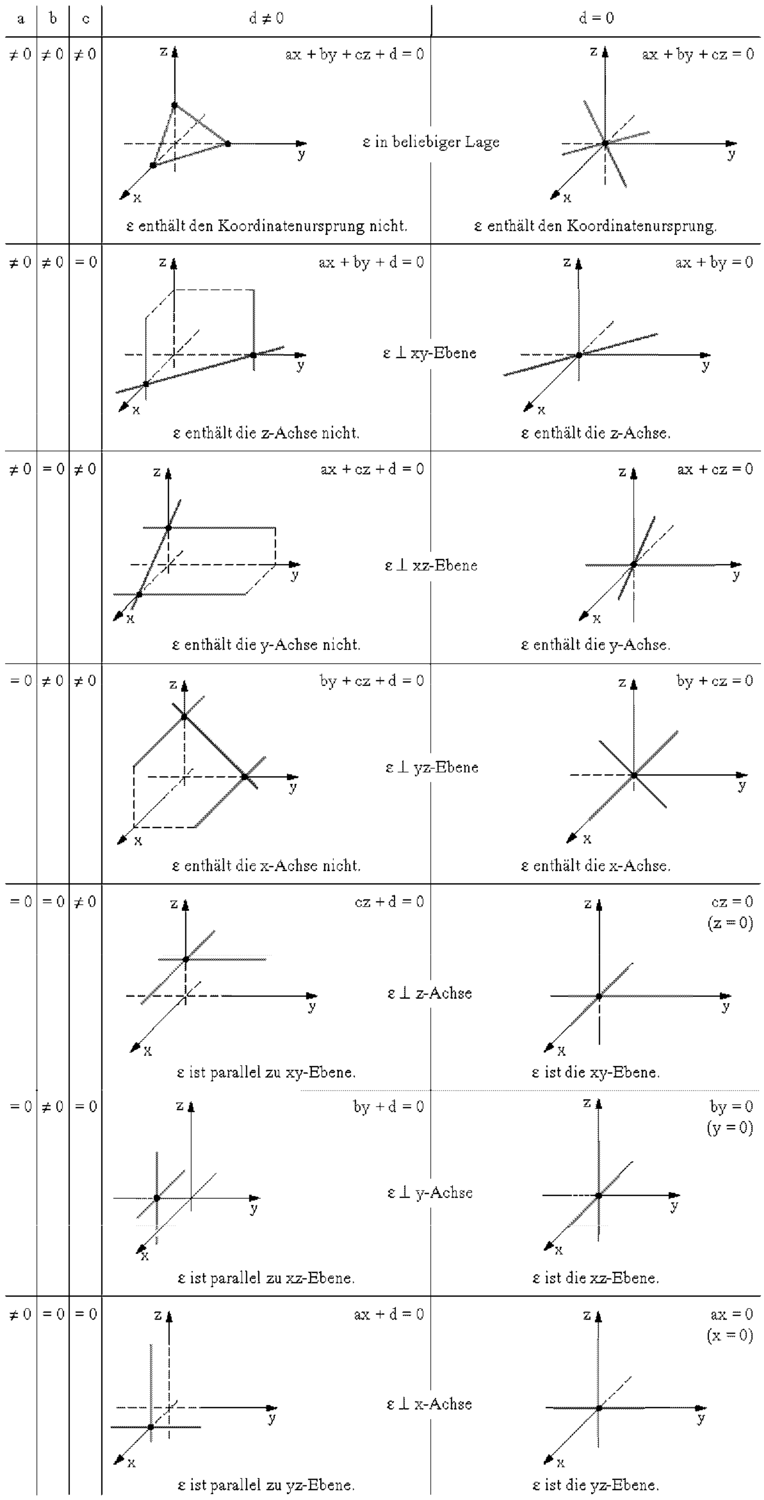

Abbildung 28: Lage einer Ebene in parameterfreier Darstellung in Abhängigkeit der Koeffizienten