8 Lagebeziehung zwischen Punkt und Gerade

Da in der Geradengleichung $g : \vec{x} = \vec{a} + k\vec{u}$ jedem Punkt X der Geradengleichung exakt ein Parameterwert k entspricht (und umgekehrt) kann die Lage eines Punktes zu einer Geraden leicht an diesem Parameter untersucht werden.

Ist k für alle Koordinaten von X gleich, so liegt der Punkt X auf der Geraden g, sonst daneben.

8.1 Beispiele für die Lagebeziehung von Punkt zu Gerade

Gerade und Punkt im $\mathbf{R}^2$

Aufgabe:
Untersuchen sie die Lage des Punktes P zur Geraden g.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2,5 \end{pmatrix} + k * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P(6 \mid 2)$$

Lösung:

$$\left.\begin{array}{rcl} 6 &=& -3 + k \cdot 2 \\ 2 &=& -2,5 + k \cdot 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rcl} k &=& 4,5 \\ k &=& 4,5 \end{array} \quad \right\} \rightarrow \underline{\underline{P \in g}}$$

Gerade und Punkte im $\mathbf{R}^3$

Aufgabe:
Es sei die Gerade g und die Punkte P_1 sowie P_2 gegeben. Untersuchen sie die Lage der Punkte zur Gerade.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad P_1(3,5 \mid 0,5 \mid 2,5) \qquad P_2(-5,5 \mid 3,5 \mid -8)$$

Lösung:

- P_1

$$\vec{p_1} = \vec{a} + k * \vec{u} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3,5 \\ 0,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + k * \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} 3,5 &=& -1 + k \cdot 3 \\ 0,5 &=& 2 + k \cdot (-1) \\ 2,5 &=& -2 + k \cdot 3 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rcl} k &=& 1,5 \\ k &=& 1,5 \\ k &=& 1,5 \end{array} \right\} \rightarrow \quad \underline{\underline{P_1 \in g}}$$

- P_2

$$\vec{p_2} = \vec{a} + k * \vec{u} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -5,5 \\ 3,5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + k * \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{rcl} -5,5 & = & -1 + k \cdot 3 \\ 3,5 & = & 2 + k \cdot (-1) \\ -8 & = & -2 + k \cdot 3 \end{array} \quad \rightarrow \quad \left. \begin{array}{rcl} k & = & -1,5 \\ k & = & -1,5 \\ k & = & -2 \end{array} \right\} \rightarrow \quad \underline{\underline{P_2 \notin g}}$$