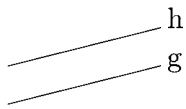
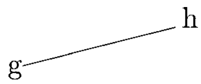
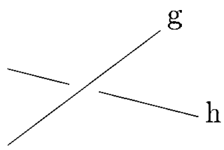
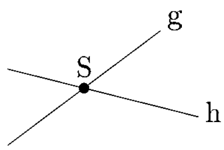
9 Lagebeziehung zwischen zwei Geraden

9.1 Mögliche Lagebeziehungen

Im Lehrer-/Schülergespräch werden die möglichen Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden $g : \vec{x} = \vec{a}_1 + k \cdot \vec{u}$ und $h : \vec{x} = \vec{a}_2 + k \cdot \vec{v}$ mit ihren Eigenschaften bezüglich linear (un)abhängige Richtungsvektoren bzw. gemeinsame Punkte anschaulich erarbeitet.

Lage	**Anschauliche Bedingung**	**Mathematische Bedingung**	**Skizze**
Echt Parallel	g parallel zu h A_2 liegt nicht auf g	$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ lin. abh. $(\vec{a}_2 - \vec{a}_1), \vec{u}_1$ lin. unabh.	
Identisch (entartet parallel)	g parallel zu h A_2 liegt auf g	$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ lin. abh. $(\vec{a}_2 - \vec{a}_1), \vec{u}_1$ lin. abh.	
Windschief (nur im $\mathbf{R}^3$)	g und h haben versch. Richtungen $(\vec{a}_2 - \vec{a}_1), \vec{u}_1, \vec{u}_2$ liegen nicht in einer Ebene	$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ lin. unabh. $(\vec{a}_2 - \vec{a}_1), \vec{u}_1, \vec{u}_2$ lin. unabh.	
Schnittpunkt	g und h haben versch. Richtungen $(\vec{a}_2 - \vec{a}_1), g, h$ liegen in einer Ebene	$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ lin. unabh. $(\vec{a}_2 - \vec{a}_1), \vec{u}_1, \vec{u}_2$ lin. abh.	

9.2 Untersuchung der Lagebeziehungen

Die Schüler sollen in arbeitsteiliger Gruppenarbeit herausarbeiten in welcher Lagebeziehung zwei Geraden zueinander stehen. Dafür werden vier Gruppen gebildet und jede Gruppe erhält eine der nachfolgenden Arbeitsanweisungen. Nach ca. 30 Minuten Arbeitszeit sollten die Ergebnisse vorliegen und zur Präsentation vorbereitet sein. Jede Gruppe stellt max. fünf Minuten lang ihr Ergebnis vor.

Gruppe 1

Stellen sie sich vor sie arbeiten auf einem kleinen Flugplatz im Tower. Bei nebligem Wetter erhalten sie plötzlich einen Funkspruch mit folgendem (verkürzt wiedergegebenen) Inhalt:
„*Unser Flugzeug befindet sich momentan am Punkt A und wir fliegen in Richtung $\vec{u}$. Unsere Instrumente signalisieren ein weiteres Flugzeug an Punkt B, welches sich in Richtung $\vec{v}$ bewegt. Überprüfen sie bitte ob eine Kollisionsgefahr besteht, und teilen sie uns gegebenenfalls die Koordinaten des möglichen Aufprallpunktes mit.* “
Die genauen Daten können sie von ihren Instrumenten folgendermaßen ablesen:

$$A(3|7|2) \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad B(4|6|2) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe:
Untersuchen sie in welcher Beziehung die Flugbahnen zueinander stehen. Übernehmen sie das Ergebnis auf die Folie und erläutern sie, wie diese Lagebeziehung mathematisch nachgewiesen werden kann.

Gruppe 2

Stellen sie sich vor sie arbeiten auf einem kleinen Flugplatz im Tower. Bei nebligem Wetter erhalten sie plötzlich einen Funkspruch mit folgendem (verkürzt wiedergegebenen) Inhalt:
„*Unser Flugzeug befindet sich momentan am Punkt A und wir fliegen in Richtung $\vec{u}$. Unsere Instrumente signalisieren ein weiteres Flugzeug an Punkt B, welches sich in Richtung $\vec{v}$ bewegt. Überprüfen sie bitte ob eine Kollisionsgefahr besteht, und teilen sie uns gegebenenfalls die Koordinaten des möglichen Aufprallpunktes mit.* “
Die genauen Daten können sie von ihren Instrumenten folgendermaßen ablesen:

$$A(3|7|2) \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad B(9|12|13) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe:
Untersuchen sie in welcher Beziehung die Flugbahnen zueinander stehen. Übernehmen sie das Ergebnis auf die Folie und erläutern sie, wie diese Lagebeziehung mathematisch nachgewiesen werden kann.

Gruppe 3

Stellen sie sich vor sie arbeiten auf einem kleinen Flugplatz im Tower. Bei nebligem Wetter erhalten sie plötzlich einen Funkspruch mit folgendem (verkürzt wiedergegebenen) Inhalt:
„*Unser Flugzeug befindet sich momentan am Punkt A und wir fliegen in Richtung $\vec{u}$. Unsere Instrumente signalisieren ein weiteres Flugzeug an Punkt B, welches sich in Richtung $\vec{v}$ bewegt. Überprüfen sie bitte ob eine Kollisionsgefahr besteht, und teilen sie uns gegebenenfalls die Koordinaten des möglichen Aufprallpunktes mit.* “
Die genauen Daten können sie von ihren Instrumenten folgendermaßen ablesen:

$$A(3|7|2) \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad B(4|6|2) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe:
Untersuchen sie in welcher Beziehung die Flugbahnen zueinander stehen. Übernehmen sie das Ergebnis auf die Folie und erläutern sie, wie diese Lagebeziehung mathematisch nachgewiesen werden kann.

Gruppe 4

Stellen sie sich vor sie arbeiten auf einem kleinen Flugplatz im Tower. Bei nebligem Wetter erhalten sie plötzlich einen Funkspruch mit folgendem (verkürzt wiedergegebenen) Inhalt:
„*Unser Flugzeug befindet sich momentan am Punkt A und wir fliegen in Richtung $\vec{u}$. Unsere Instrumente signalisieren ein weiteres Flugzeug an Punkt B, welches sich in Richtung $\vec{v}$ bewegt. Überprüfen sie bitte ob eine Kollisionsgefahr besteht, und teilen sie uns gegebenenfalls die Koordinaten des möglichen Aufprallpunktes mit.* “
Die genauen Daten können sie von ihren Instrumenten folgendermaßen ablesen:

$$A(3|7|2) \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad B(9|12|13) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe:
Untersuchen sie in welcher Beziehung die Flugbahnen zueinander stehen. Übernehmen sie das Ergebnis auf die Folie und erläutern sie, wie diese Lagebeziehung mathematisch nachgewiesen werden kann.

Musterlösungen für Gruppenarbeit

Gruppe 1

Sind die Richtungsvektoren linear abhängig?

$$\frac{1}{4} = \frac{1,5}{6} = \frac{2}{8} \quad ? \qquad \rightarrow \text{erfüllt, darum parallel oder identisch}$$

Differenzvektor der Aufpunkte:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ist Differenzvektor linear abhängig zu den Richtungsvektoren (Ansatz über Gaußsches Eliminationsverfahren)?

$$\begin{array}{rrr} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1,5 & 6 \\ 0 & 2 & 8 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrr} 1 & - & -4 \\ 0 & 2,5 & 10 \\ 0 & 2 & 8 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rrr} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{sie sind linear abhängig}$$

→ Die Flugbahnen sind identisch.

Gruppe 2

Sind die Richtungsvektoren linear abhängig?

$$\frac{1}{4} = \frac{1,5}{6} = \frac{2}{8} \quad ? \qquad \rightarrow \text{erfüllt, darum parallel oder identisch}$$

Differenzvektor der Aufpunkte:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Ist Differenzvektor linear abhängig zu den Richtungsvektoren (Ansatz über Determinante)?

$$DET \begin{vmatrix} -6 & 1 & 4 \\ -5 & 1,5 & 6 \\ -11 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 72 - 66 + 40 + 66 + 72 + 40 = 224$$

$$\text{Determinante } \neq 0 \quad \rightarrow \text{die Vektoren sind linear unabhängig}$$

→ Die Flugbahnen verlaufen parallel.

Gruppe 3

Sind die Richtungsvektoren linear abhängig?

$$\frac{1}{2} = \frac{1,5}{-1} = \frac{2}{3} \quad ? \qquad \rightarrow \text{falsch, darum windschief oder Schnittpunkt}$$

Geradengleichungen gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem ablesen:

$$\begin{array}{ll} (I) & k - 2l = 1 \\ (II) & 1,5k + l = -1 \\ (III) & 2k - 3l = 0 \end{array}$$

Aus (I) und (II):

$$\begin{array}{l} \rightarrow \quad k = -\frac{1}{4} \\ \rightarrow \quad l = -\frac{5}{8} \end{array}$$

k und l in (III):

$$2 \cdot (-\frac{1}{4}) - 3 \cdot (-\frac{5}{8}) = 0 \qquad \rightarrow \text{falsche Aussage}$$

→ Die Flugbahnen liegen windschief.

Gruppe 4

Sind die Richtungsvektoren linear abhängig?

$$\frac{1}{2} = \frac{1,5}{-1} = \frac{2}{3} \quad ? \qquad \rightarrow \text{falsch, darum windschief oder Schnittpunkt}$$

Geradengleichungen gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem ablesen:

$$\begin{array}{lr} (I) & k - 2l = 6 \\ (II) & 1,5k + l = 5 \\ (III) & 2k - 3l = 11 \end{array}$$

Aus (I) und (II):

$$\begin{array}{l} \rightarrow \quad k = 4 \\ \rightarrow \quad l = -1 \end{array}$$

k und l in (III):

$$2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) = 11 \qquad \rightarrow \text{wahre Aussage}$$

→ <u>Die Flugbahnen schneiden sich.</u>

Schnittpunkt berechnen (Wert von k oder l in zugehörige Geradengleichung einsetzen):

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \underline{\underline{S(7 \mid 13 \mid 10)}}$$

9.2.1 Lösungsstrategie für Geradengleichungen mit Parametern

Es soll die Lage zweier Geraden $g : \vec{x} = \vec{a}_1 + k \cdot \vec{u}$ und $h : \vec{x} = \vec{a}_2 + l \cdot \vec{v}$ zueinander untersucht werden.

Der Entscheidungsablauf aus Abbildung 29 verdeutlicht die prinzipielle Vorgehensweise.

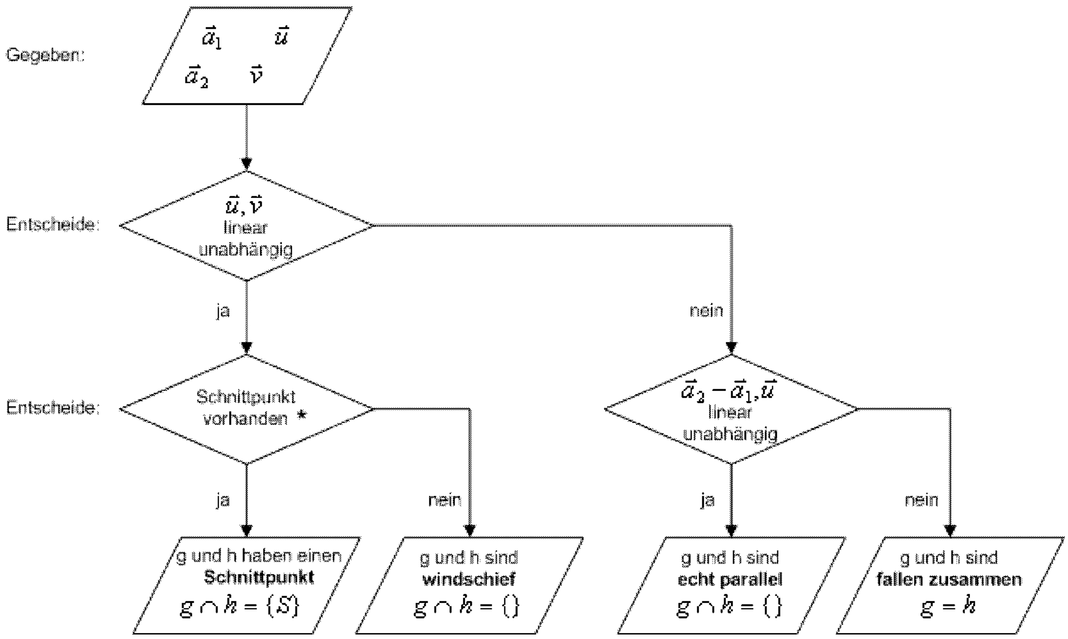


Abbildung 29: Entscheidungsfluss zur Lagebeziehung zweier Geraden

* Ansatz für Überprüfung auf Schnittpunkt:
Angenommen es gibt einen Schnittpunkt S. Die Koordinaten dieses Punktes wären damit sowohl mit der Geradengleichung von $g : \vec{x}_S = \vec{a}_1 + k \cdot \vec{u}$, als auch mit der von $h : \vec{x}_S = \vec{a}_2 + l \cdot \vec{v}$ beschreibbar.
Da es sich jedes Mal um den gleichen Punkt (nämlich den Schnittpunkt) handelt, können die Geradengleichungen gleich gesetzt werden:
$\vec{a}_1 + k \cdot \vec{u} = \vec{a}_2 + l \cdot \vec{v}$
$\Rightarrow$ 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten k und l:
- aus zwei Gleichung (z. B. der 1. und 2.) k und l berechnen
- Werte von k und l in die dritte Gleichung einsetzen. Falls ...
  ... Aussage falsch, dann sind g und h windschief
  ... Aussage wahr, dann schneiden sich g und h (Schnittpunkt durch einsetzen von k (bzw. l) in g (bzw. h) berechnen)

Beispiele für Geradengleichungen mit Parameter

Untersuchen sie die Geraden g und h auf ihre Lage zueinander und geben sie bei Bedarf einen Schnittpunkt an.

Beispiel 1: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -16 \\ -6 \end{pmatrix}$

Rechnung	**Erläuterung**
Gilt $\frac{-2}{4} = \frac{8}{-16} = \frac{3}{-6}$? $\rightarrow$ ja, deshalb $\vec{u}$, $\vec{v}$ lin. abh.	Überprüfung ob die Richtungsvektoren lin. unabhängig
$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	Berechnung des Differenzvektors der Aufpunkte $\vec{a}_2 - \vec{a}_1$
Gilt $\frac{0}{-2} = \frac{0}{8} = \frac{3}{3}$? $\rightarrow$ nein, deshalb $(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)$ und $\vec{u}$ lin. unabh.	Überprüfung ob der Differenzvektor der Aufpunkte lin. abhängig (d. h. parallel) zum Richtungsvektor der Geraden g. Dies ist nicht der Fall $\rightarrow$ g und h sind echt parallel.

Beispiel 2: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Rechnung	**Erläuterung**
Gilt $\frac{-2}{2} = \frac{8}{-4} = \frac{3}{-3}$? $\rightarrow$ nein, deshalb $\vec{u}$, $\vec{v}$ lin. unabh.	Überprüfung ob die Richtungsvektoren lin. unabhängig
(I) $2 - 2k = 0 + 2l$ (II) $1 + 8k = 1 - 4l$ (III) $1 + 3k = 4 - 3l$	Schnittansatz: die Gleichungen der Geraden werden gleichgesetzt und zeilenweise angeschrieben
$k = 1 - l$	Aus (I) wird Ausdruck für k berechnet
$1 + 8(1 - l) = 1 - 4l$ $l = 2$	Ausdruck für k wird in (II) eingesetzt und Wert für l berechnet.
$k = 1 - 2$ $k = -1$	Wert von l wird in Ausdruck für k eingesetzt und Wert für k berechnet.
$1 - 3 \cdot (-1) = 4 - 3 \cdot 2$ $1 - 3 = 4 - 6$ $-2 = -2$	Werte von k und l werden in (III) eingesetzt. Es gibt eine wahre Aussage $\rightarrow$ Schnittpunkt
$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\vec{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$	Wert von l wird in Gleichung der Geraden h eingesetzt und damit der Ortsvektor $\vec{OS}$ des Schnittpunktes $S(4 \mid -7 \mid -2)$ berechnet.

Beispiel 3: $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$

Rechnung	**Erläuterung**
Gilt $\frac{-2}{2} = \frac{8}{-8} = \frac{3}{-3}$? $\rightarrow$ ja, deshalb $\vec{u}$, $\vec{v}$ lin. abh.	Überprüfung ob die Richtungsvektoren lin. unabhängig
$\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$	Berechnung des Differenzvektors der Aufpunkte $\vec{a}_2 - \vec{a}_1$
Gilt $\frac{-2}{2} = \frac{8}{-8} = \frac{3}{-3}$? $\rightarrow$ ja, deshalb $(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)$ und $\vec{u}$ lin. abh.	Überprüfung ob der Differenzvektor der Aufpunkte lin. abhängig (d. h. parallel) zum Richtungsvektor der Geraden g. Dies ist hier der Fall $\rightarrow$ g und h sind identisch.

Beispiel 4: $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

Rechnung	**Erläuterung**
Gilt $\frac{-2}{2} = \frac{8}{8} = \frac{3}{3}$? $\rightarrow$ nein, deshalb $\vec{u}$, $\vec{v}$ lin. unabh.	Überprüfung ob die Richtungsvektoren lin. unabhängig
(I) $2 - 2k = 2 + 2l$ (II) $1 + 8k = 1 + 8l$ (III) $1 + 3k = 4 + 3l$	Schnittansatz: die Gleichungen der Geraden werden gleichgesetzt und zeilenweise angeschrieben
$l = -k$	Aus (I) wird Ausdruck für l berechnet
$1 + 8k = 1 + 8(-k)$ $k = 0$	Ausdruck für l wird in (II) eingesetzt und Wert für k berechnet.
$l = 0$	Wert von k wird in Ausdruck für l eingesetzt und Wert für l berechnet.
$1 + 3 \cdot 0 = 4 + 3 \cdot 0$ $1 = 4$	Werte von k und l werden in (III) eingesetzt. Es gibt eine falsche Aussage $\rightarrow$ g und h liegen windschief zueinander

9.2.2 Lösungsstrategie für Geradengleichungen ohne Parametern

Die Lage zweier Geraden $g : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3 = 0$ und $h : b_1x_1 + b_2x_2 + b_3 = 0$ zueinander soll untersucht werden. Dabei ist zu beachten, dass diese Form der Geradengleichung <u>nur</u> im $\mathbf{R}^2$ existiert.

Sollte ein Schnittpunkt existieren, so müsste es einen Punkt $S(x_1 \mid x_2)$ geben, der beide Geradengleichungen erfüllt. Verlaufen die Geraden dagegen parallel, so ist kein gemeinsamer Punkt vorhanden. Als letzte Möglichkeit könnten die Geraden aufeinander liegen. In diesem Fall wären unendlich viele Punkte identisch.

Aus diesen Überlegungen heraus ergibt sich der Ansatz die zwei Geradengleichungen als ein Gleichungssystem mit den zwei Unbekannten x_1 und x_2 zu betrachten, und zu berechnen wie viele Lösungen (=Punkte) dieses Gleichungssystem besitzt.

Hat das Gleichungssystem zur Berechnung der gemeinsamen Punkte ...

- ... genau eine Lösung, so **schneiden** sich die Geraden (Schnittpunkt).
- ... keine Lösung, so sind die Geraden im $\mathbf{R}^2$ **echt parallel**.
- ... unendlich viele Lösungen, so fallen die Geraden zusammen (= **identisch** oder **entartet parallel**).

Beispiele für Geradengleichungen ohne Parameter

Untersuchen sie die Geraden g und h auf ihre Lage zueinander und geben sie bei Bedarf einen Schnittpunkt an.

Beispiel 1: $g: 10x_1 + 6x_2 = -8 \qquad h: 5x_1 + 3x_2 + 4 = 0$

Rechnung	**Erläuterung**
(I) $10x_1 + 6x_2 = -8$ (II) $5x_1 + 3x_2 + 4 = 0$	Gleichungssystem zur Berechnung gemeinsamer Punkte aufstellen. Wird in (I) der Wert -8 auf die andere Seite gebracht, wäre deutlich zu sehen, dass (I) ein Vielfaches von (II). Damit kann es keinen Schnittpunkt mehr geben! Die Geraden laufen entweder parallel oder sind identisch.
$x_1 = -\frac{8}{10} - \frac{6}{10}x_2$	Aus (I) wird ein Ausdruck für x_1 berechnet
$5 \cdot (-\frac{8}{10} - \frac{6}{10}x_2) + 3x_2 + 4 = 0$ $-4 - 3x_2 + 3x_2 + 4 = 0$ $0 = 0$	Ausdruck für x_1 in (II) einsetzen. Dies ergibt eine wahre Aussage, d. h. das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen $\rightarrow$ g und h sind liegen aufeinander (=sind identisch)

Beispiel 2: $g: 10x_1 + 6x_2 + 8 = 0 \qquad h: 5x_1 + 3x_2 - 1 = 0$

Rechnung	**Erläuterung**
(I) $10x_1 + 6x_2 + 8 = 0$ (II) $5x_1 + 3x_2 - 1 = 0$	Gleichungssystem zur Berechnung gemeinsamer Punkte aufstellen.
$x_1 = -\frac{8}{10} - \frac{6}{10}x_2$	Aus (I) wird ein Ausdruck für x_1 berechnet.
$5(-\frac{8}{10} - \frac{6}{10}x_2) + 3x_2 - 1 = 0$ $-4 - 3x_2 + 3x_2 - 1 = 0$ $-5 = 0$	Ausdruck für x_1 wird in (II) eingesetzt. Dies ergibt eine falsche Aussage, d. h. das Gleichungssystem hat keine Lösung $\rightarrow$ g und h sind echt parallel

Beispiel 3: $g: 10x_1 + 6x_2 = -8 \qquad h: 5x_1 + 2x_2 = -6$

Rechnung	**Erläuterung**
(I) $10x_1 + 6x_2 = -8$ (II) $5x_1 + 2x_2 = -6$	Gleichungssystem zur Berechnung gemeinsamer Punkte aufstellen.
$x_1 = -\frac{8}{10} - \frac{6}{10}x_2$	Aus (I) wird ein Ausdruck für x_1 berechnet.
$x_2 = 2$ $x_1 = -2$	Ausdruck für x_1 wird in (II) eingesetzt. Damit erhält man einen Wert für x_2. Mit diesem kann der Wert von x_1 berechnet werden. Es gibt genau eine Lösung $\rightarrow$ x_1 und x_2 sind Koordinaten des Schnittpunktes $S(-2 \mid 2)$

9.3 Übungsaufgaben

Geben sie bei den nachfolgenden Aufgaben die Lage der zwei Geraden zueinander, und ggf. die Koordinaten eines Schnittpunktes, an.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -6,5 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $g: x_1 - 2x_2 = 5$ und $h: 3x_1 - 6x_2 = 2$

e) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

f) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

g) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösungen:

a) Richtungsvektoren sind lin. abh., aber Aufpunkt $A_1(1 \mid 1 \mid 0)$ nicht auf h $\rightarrow$ echt parallel.

b) Richtungsvektoren sind lin. unabh. und Geraden liegen in einer Ebene (im $\mathbf{R}^2$ ist dies immer der Fall!) $\rightarrow$ Schnittpunkt $S(-5|-2)$

c) Richtungsvektoren sind lin. unabh., und Schnittansatz liefert wahre Aussage $\rightarrow$ Schnittpunkt $S(6|2|-5)$

d) Gleichungssystem hat keine Lösung $\rightarrow$ echt parallel.

e) Richtungsvektoren sind lin. unabh., und Schnittansatz liefert falsche Aussage $\rightarrow$ windschief

f) Richtungsvektoren sind lin. abh., sowie $(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)$ und $\vec{u}$ sind lin. abh. $\rightarrow$ identisch (entartet parallel)

g) Richtungsvektoren sind lin. unabh., und Schnittansatz liefert falsche Aussage $\rightarrow$ windschief