10 Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene

Im $\mathbf{R}^3$ seien die Ebene E und die Gerade g gegeben:

$$E : \vec{x} = \vec{a}_1 + k\vec{v} + l\vec{w} \qquad k, l \in \mathbf{R}$$

$$g : \vec{x} = \vec{a}_2 + r\vec{u} \qquad r \in \mathbf{R}$$

Die Gerade kann im Bezug zur Ebene folgende Lagen einnehmen (siehe auch Grafik 30):

- Gerade und Ebene schneiden sich → es gibt einen Schnittpunkt S.
- Gerade und Ebene sind echt parallel.
- Gerade liegt in der Ebene.

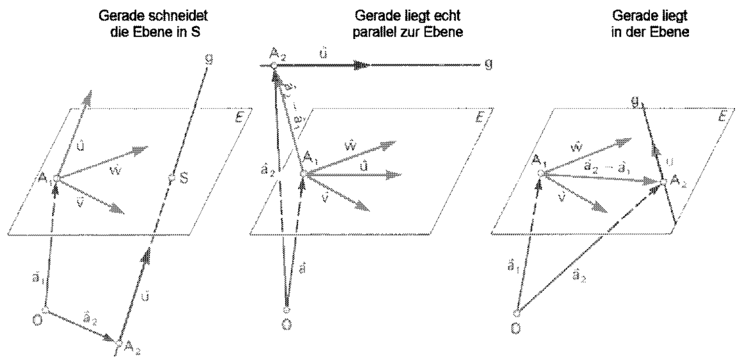

Abbildung 30: Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene

Lage	**Anschauliche Bedingung**	**Mathematische Bedingung**
Schnittpunkt	Die Richtungsvektoren der Ebene und der Geraden sind lin. unabhängig	$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ lin. unabhängig
Echt parallel	Die Richtungsvektoren der Ebene und der Geraden sind lin. abhängig <u>und</u> der Differenzvektor der Aufpunkte und die Richtungsvektoren der Ebene sind lin. unabhängig.	**(1)** $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ lin. abhängig **(2)** $(\vec{a}_2 - \vec{a}_1), \vec{v}, \vec{w}$ lin. unabhängig
Gerade liegt in der Ebene	Die Richtungsvektoren der Ebene und der Geraden sind lin. abhängig <u>und</u> der Differenzvektor der Aufpunkte und die Richtungsvektoren der Ebene sind lin. abhängig.	**(1)** $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ lin. abhängig **(2)** $(\vec{a}_2 - \vec{a}_1), \vec{v}, \vec{w}$ lin. abhängig

Lösungsstrategie für Ebenen in Parameterdarstellung

Das Flussdiagramm aus Abbildung 31 stellt das systematische Vorgehen bei der Untersuchung der Lagebeziehung einer Geraden zu einer Ebene in graphischer Form dar.

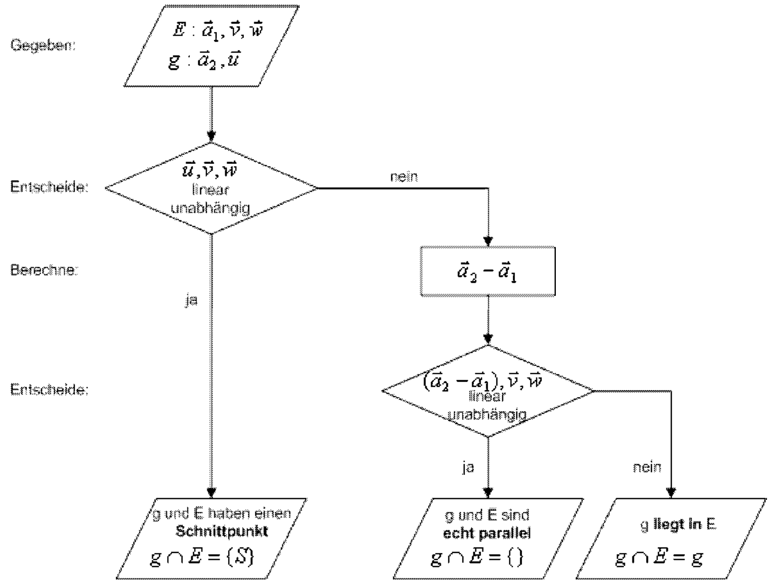

Abbildung 31: Entscheidungsablauf zur Lagebestimmung einer Geraden zu einer Ebene

Beispiele zur Lagebeziehung bei Parameterdarstellung der Ebene

Beispiel 1: Gerade und Ebene liegen parallel

Aufgabe: Untersuchen sie die Lagebeziehung der Geraden g zur Ebene E und geben sie gegebenenfalls die Koordinaten eines Schnittpunktes an.

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. Entscheide ob $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig. $\rightarrow$ Gaußsches Eliminationsverfahren.

$$\begin{array}{rrr} -2 & 5 & 8 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 19 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr} 1 & 9 & 19 \\ -2 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 8 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr} 1 & 9 & 19 \\ 0 & 21 & 42 \\ 0 & 23 & 46 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr} 1 & 9 & 19 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ lin. abh.

2. Bildung des Differenzvektors der Aufpunkte

$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$$

3. Untersuchung ob $(\vec{a}_2 - \vec{a}_1), \vec{v}, \vec{w}$ lin. abhängig $\rightarrow$ Gaußsches Eliminationsverfahren.

$$\begin{array}{rrr} 4 & -2 & 5 \\ 10 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 9 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr} 1 & -\frac{1}{3} & -3 \\ 10 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr} 1 & -\frac{1}{3} & -3 \\ 0 & \frac{4}{3} & 33 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 17 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr} 1 & -\frac{1}{3} & -3 \\ 0 & \frac{4}{3} & 33 \\ 0 & 0 & \frac{67}{2} \end{array}$$

$\Rightarrow (\vec{a}_2 - \vec{a}_1), \vec{v}, \vec{w}$ lin. unabh.

4. $\Rightarrow$ Die Gerade liegt echt parallel zur Ebene.

Beispiel 2: Gerade liegt in der Ebene

Aufgabe: Untersuchen sie die Lagebeziehung der Geraden g zur Ebene E und geben sie gegebenenfalls die Koordinaten eines Schnittpunktes an.

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 20 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. Entscheide ob $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig. $\rightarrow$ Gaußsches Eliminationsverfahren.

$$\begin{array}{rrr} -2 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 9 & 11 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr} 1 & 9 & 11 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr} 1 & 9 & 11 \\ 0 & 21 & 21 \\ 0 & 23 & 23 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr} 1 & 9 & 19 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ lin. abh.

2. Bildung des Differenzvektors der Aufpunkte

$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix}$$

3. Untersuchung ob $(\vec{a}_2 - \vec{a}_1), \vec{v}, \vec{w}$ lin. abhängig $\rightarrow$ Gaußsches Eliminationsverfahren.

$$\begin{array}{rrr} 8 & -2 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \\ 19 & 1 & 9 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr} 8 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{23}{4} & -\frac{23}{8} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr} 8 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 46 & -23 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr} 8 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow (\vec{a}_2 - \vec{a}_1), \vec{v}, \vec{w}$ lin. abh.

4. $\Rightarrow$ Die Gerade liegt in der Ebene.

Beispiel 3: Gerade schneidet die Ebene

Aufgabe: Untersuchen sie die Lagebeziehung der Geraden g zur Ebene E und geben sie gegebenenfalls die Koordinaten eines Schnittpunktes an.

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. Entscheide ob $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig. → Gaußsches Eliminationsverfahren.

$$\begin{array}{rrr} -2 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 9 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr} 1 & 9 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr} 1 & 9 & 11 \\ 0 & 21 & 1 \\ 0 & 23 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr} 1 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{21} \\ 0 & 0 & \frac{40}{21} \end{array}$$

$\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ lin. unabh.

2. $\Rightarrow$ Die Gerade schneidet die Ebene in einem Schnittpunkt S

3. Berechnung des Schnittpunktes S.
Ansatz: $\vec{a}_1 + k\vec{v} + l\vec{w} = \vec{x} = \vec{a}_2 + r\vec{u}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

→ durch umstellen: $$k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dieses inhomogene Gleichungssystem wird mittels des Gaußschen Eliminationsverfahrens gelöst:

$$\left.\begin{array}{rrr} -2 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{r} 4 \\ 10 \\ 1 \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{rrr} 1 & 9 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{r} 1 \\ 10 \\ 4 \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{rrr} 1 & 9 & -1 \\ 0 & 21 & -1 \\ 0 & 23 & -3 \end{array}\right| \begin{array}{r} 1 \\ 12 \\ 6 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{rrr} 1 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{21} \\ 0 & 0 & -\frac{40}{21} \end{array}\right| \begin{array}{r} 1 \\ \frac{4}{7} \\ -\frac{50}{7} \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{rrr} 1 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{21} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{r} 1 \\ \frac{4}{7} \\ \frac{15}{4} \end{array}$$

$\rightarrow r = \frac{15}{4} = 3,75$
$\rightarrow l = \frac{1}{21} \cdot r + \frac{4}{7} = \frac{1}{21} \cdot \frac{15}{4} + \frac{4}{7} = \frac{21}{28} = 0,75$
$\rightarrow k = -9 \cdot l + 1 \cdot r + 1 = -9 \cdot \frac{21}{28} + 1 \cdot \frac{15}{4} + 1 = -2$

Um die Koordinaten des Schnittpunktes S zu berechnen wird der Wert von r in die Geradengleichung eingesetzt:

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 3,75 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 10,75 \\ -1,75 \\ 5,75 \end{pmatrix}$$

Um dieses Ergebnis zu überprüfen können die Werte von k und l noch in die Ebenengleichung eingesetzt werden.

Man erkennt, dass die Überprüfung der linearen Unabhängigkeit in 1 auch mit dem inhomogenen Gleichungssystem aus 3 durchgeführt werden könnte. Dies ist möglich, da die Richtungsvektoren der Ebene ($\vec{v}$ und $\vec{w}$) darin unverändert vorkommen, und beim Richtungsvektor der Geraden ($\vec{u}$) lediglich die Richtung umgekehrt wurde, was jedoch für eine Überprüfung auf lineare Abhängigkeit unerheblich ist.

D. h. bei der Überprüfung ob die Gerade die Ebene schneidet, oder ob sie echt parallel ist bzw. in der Ebene liegt, lässt sich sogleich mit dem Ansatz zur Berechnung der Koordinaten eines evtl. vorhandenen Schnittpunktes kombinieren.

Sollte das inhomogene Gleichungssystem ...

... eine nichttriviale Lösung besitzen, so existiert ein Schnittpunkt.

z. B.
$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \rightarrow k = 1 - 3 \cdot l - 7 \cdot r = -24 \\ \rightarrow l = 4 - r = 1 \\ \rightarrow r = 3 \end{array}$$

... keine Lösung haben, so liegt die Gerade echt parallel zur Ebene.

z. B.
$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \qquad \rightarrow 0 \cdot k + 0 \cdot l + 0 \cdot r = 2 \text{ ist ein Widerspruch}$$

... eine komplette Nullzeile haben, so liegt die Gerade in der Ebene.

z. B.
$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \rightarrow k = 9 - 6r \\ \rightarrow l = 5 - 2r \\ \rightarrow r \text{ ist frei wählbar} \end{array}$$

10.1 Lösungsstrategie für Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen in parameterfreier Darstellung

Nachdem die Gleichung der Ebene in parameterfreier Form vorliegt (bzw. erstellt wurde), werden die Terme für x_1, x_2 und x_3 aus der Geradengleichung inklusive des darin befindlichen Parameters k in die Gleichung der Ebene eingesetzt.

Falls das lösen dieser Gleichung ...
... eine eindeutige Lösung für k ergibt, existiert ein Schnittpunkt.
→ Einsetzen des Wertes von k in die Geradengleichung ergibt die Koordinaten des Schnittpunktes.
... keine Lösung für k ergibt, existiert kein gemeinsamer Punkt.
→ Die Gerade liegt echt parallel zur Ebene.
... unendliche viele Lösungen für k ergibt, ist die Gleichung allgemeingültig.
→ Die Gerade liegt in der Ebene.

10.2 Beispiele zur Lagebeziehung einer Gerade zu einer Ebene in parameterfreier Darstellung

Beispiel 1: Gerade und Ebene liegen parallel

Aufgabe: Untersuchen sie die Lagebeziehung der Geraden g zur Ebene E und geben sie gegebenenfalls die Koordinaten eines Schnittpunktes an.

$$E: -21x_1 + 23x_2 + 4x_3 + 243 = 0$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Lösung:

- Aus der Geradengleichung erhält man:
  $x_1 = 7 + 8r$
  $x_2 = 2 + 4r$
  $x_3 = -2 + 19r$
- Terme für x_1, x_2 und x_3 werden in die Ebenengleichung eingesetzt.
  $$-21 \cdot (7 + 8r) + 23 \cdot (2 + 4r) + 4 \cdot (-2 + 19r) - 243 = 0$$
- Gleichung wenn möglich nach r auflösen
  $$-352 + 0 \cdot r = 0$$
- Es gibt also keinen Parameterwert für den diese Gleichung erfüllt wäre.
  → Die Gerade liegt echt parallel zur Ebene.

Beispiel 2: Gerade liegt in der Ebene

Aufgabe: Untersuchen sie die Lagebeziehung der Geraden g zur Ebene E und geben sie gegebenenfalls die Koordinaten eines Schnittpunktes an.

$$E : -21x_1 + 23x_2 + 4x_3 + 243 = 0$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 20 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Lösung:

- Aus der Geradengleichung erhält man:
  $x_1 = 11 + r$
  $x_2 = -4 - r$
  $x_3 = 20 + 11r$
- Terme für x_1, x_2 und x_3 werden in die Ebenengleichung eingesetzt.
  $$-21 \cdot (11 + r) + 23 \cdot (-4 - r) + 4 \cdot (20 + 11r) + 243 = 0$$
- Gleichung wenn möglich nach r auflösen
  $$0 \cdot r = 0$$
- Diese Gleichung ist allgemeingültig. Für r können beliebige Werte eingesetzt werden. → Die Gerade liegt in der Ebene.

Beispiel 3: Gerade schneidet die Ebene

Aufgabe: Untersuchen sie die Lagebeziehung der Geraden g zur Ebene E und geben sie gegebenenfalls die Koordinaten eines Schnittpunktes an.

$$E : -21x_1 + 23x_2 + 4x_3 + 243 = 0$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

- Aus der Geradengleichung erhält man:
  $x_1 = 7 + r$
  $x_2 = 2 - r$
  $x_3 = 2 + r$
- Terme für x_1, x_2 und x_3 werden in die Ebenengleichung eingesetzt.
  $$-21 \cdot (7 + r) + 23 \cdot (2 - r) + 4 \cdot (2 + r) + 243 = 0$$

- Gleichung wenn möglich nach r auflösen

$$150 - 40 \cdot r = 0 \qquad \rightarrow \qquad r = 3,75$$

- Es existiert eine eindeutige Lösung für k. $\rightarrow$ Die Gerade schneidet die Ebene.

- Berechnung der Koordinaten des Schnittpunktes durch einsetzen des Wertes von k in die Geradengleichung.

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 3,75 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 10,75 \\ -1,75 \\ 5,75 \end{pmatrix}$$