11 Lagebeziehung zwischen zwei Ebenen

11.1 Mögliche Lagebeziehungen

Im $\mathbf{R}^3$ seien zwei Ebenen E_1 und E_2 gegeben.

Diese zwei Ebenen können zueinander drei mögliche Lagebeziehungen einnehmen:

- sie haben keine gemeinsamen Punkte, liegen also echt parallel zueinander.
- sie haben unendlich viele gemeinsame Punkte und sind parallel zueinander. D. h. sie sind identisch.
- sie haben unendlich viele gemeinsame Punkte und sind nicht parallel zueinander. D. h. sie haben eine Schnittgerade.

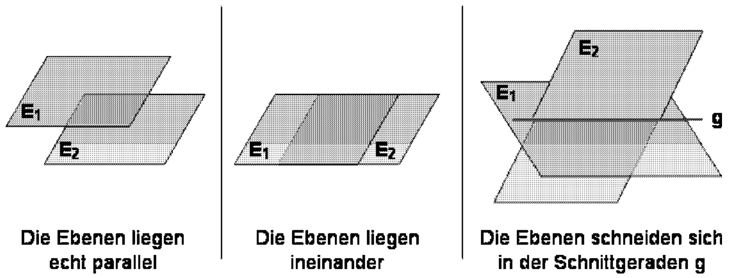

Abbildung 32: Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen

11.2 Lösungsstrategie für Ebenen in Parameterdarstellung

Wie bei den Betrachtungen zur Lagebeziehung einer Geraden bezüglich einer Ebene lässt sich auch hier die Beschreibung der beiden betrachteten Ebenen mit Hilfe ihrer Richtungsvektoren nutzen. Sind $\vec{u}_1$ und $\vec{v}_1$ die zwei Richtungsvektoren von E_1, sowie $\vec{u}_2$ und $\vec{v}_2$ zwei Richtungsvektoren von E_2, so könnte man das Vektorsystem $\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_2$ untersuchen. Da jedoch alle vier Vektoren zum dreidimensionalen Raum gehören, ist dieses Vektorsystem immer linear abhängig, weshalb dessen Betrachtung für diese Problemstellung keinen Wert besitzt.

Aus raumgeometrischen Überlegungen kann man folgern, dass wir zwei Vektorsysteme betrachten müssen: $\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{u}_2)$ und $\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Sind diese beiden Systeme gleichzeitig linear abhängig, so liegen die beiden betrachteten Ebenen E_1 und E_2 parallel zueinander. Im anderen Fall (wenigstens eines der beiden Systeme ist linear unabhängig) schneiden beide Ebenen einander in einer Geraden.

Man kann sich leicht vorstellen, dass diese Überlegungen schnell sehr umfangreich, und damit unübersichtlich werden. Deshalb soll hier auch nicht weiter auf diesen Ansatz eingegangen werden.

11.3 Lösungsstrategie für Ebenen in parameterfreier Darstellung

Gegeben seien zwei parameterfreie Ebenen:

$$E_1 : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0$$

$$E_2 : b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4 = 0$$

Die Bestimmung der Lagebeziehung geschieht in zwei Schritten:

1. **Untersuchung, ob die Ebenen parallel oder identisch sind**
   Liegen die Ebenen parallel, so gilt:
   $$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$
   Sind die Ebenen sogar identisch, so gilt:
   $$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4}$$

2. **Die Ebenen schneiden sich**
   Trifft keiner der unter 1 genannten Fälle zu, so existiert eine Schnittgerade g. Alle ihre Punkte müssen die beiden Ebenengleichungen E_1 und E_2 erfüllen.

   Damit erhält man jedoch erst ein unterbestimmtes Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und den drei Unbekannten x_1, x_2 und x_3. Hier greift man nun zu einem Trick:
   Alle Punkte der Schnittgeraden g erfüllen mit ihren Koordinaten auch die Gleichung: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$.

   Über diesen Umweg erhält man ein lösbares lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten:
   $$\begin{array}{rccccccccc} E_1: & a_1 \cdot x_1 & + & a_2 \cdot x_2 & + & a_3 \cdot x_3 & + & a_4 & = & 0 \\ E_2: & b_1 \cdot x_1 & + & b_2 \cdot x_2 & + & b_3 \cdot x_3 & + & b_4 & = & 0 \\ \mathbf{R^3}: & 0 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & & & = & 0 \end{array}$$
   Hat dieses Gleichungssystem ...
   ... keine Lösung, so liegen die Ebenen echt parallel zueinander.
   ... eine Lösung, so existiert eine Schnittgerade $g : \vec{x} = \vec{a} + k \cdot \vec{u}$
   ... unendlich viele Lösungen, so liegen die Ebenen ineinander und man erhält wieder eine Ebenengleichung

11.3.1 Beispiele zur Lagebeziehung zweier Ebenen in parameterfreier Darstellung

Ebenen liegen parallel

Aufgabe: Untersuchen sie die Lagebeziehung der zwei Ebenen E_1 und E_2 zueinander, und geben sie gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgeraden g an.

$$E_1 : x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$$

$$E_2 : -2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 2 = 0$$

Lösung:

- Untersuchung, ob die Ebenen parallel sind:

  $$\frac{1}{-2} = \frac{2}{-4} = \frac{-3}{6}$$

  Dies ist erfüllt, damit sind die Ebenen **parallel**.

- Untersuchung, ob die Ebenen identisch sind:

  $$\frac{1}{-2} = \frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} = \frac{0}{2}$$

  Dies ist nicht erfüllt, damit sind die Ebenen **nicht identisch**.
  → Die Ebenen liegen also **echt parallel** zueinander.

- Eigentlich könnte man hier die Berechnung beenden. Nachfolgende Rechnung soll lediglich einen, wenn auch etwas aufwändigern, aber doch einen alternativen Lösungsweg aufzeigen.
  Da eine Lösung für die drei Unbekannten x_1, x_2 und x_3 gesucht wird, muss die Gleichung der Ebene 2 zunächst umgestellt werden:

  $$E_2 : -2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = -2$$

- Aufstellen des (erweiterten) Gleichungssystems:

  $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & = & -2 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & = & 0 \end{array}$$

- Lösen des Gleichungssystems mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

  $$\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & -4 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

  → Die zweite Zeile bedeutet: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -2$. Damit hat das Gleichungssystem **keine Lösung**.
  → Die Ebenen liegen **echt parallel** zueinander.

Ebenen sind identisch

Aufgabe: Untersuchen sie die Lagebeziehung der zwei Ebenen E_1 und E_2 zueinander, und geben sie gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgeraden g an.

$$E_1 : x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$$

$$E_2 : -2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0$$

Lösung:

- Untersuchung, ob die Ebenen parallel sind:

  $$\frac{1}{-2} = \frac{2}{-4} = \frac{-3}{6}$$

  Dies ist erfüllt, damit sind die Ebenen **parallel!**

- Da beiden Konstanten a_4 bzw. b_4 Null sind, kann der Quotient $\frac{a_4}{b_4}$ nicht gebildet werden (Division durch Null). Deshalb folgt aus den anderen Quotienten bereits dass die Ebenen **identisch** sind.

- Nachfolgende Berechnung zeigt lediglich noch einmal einen alternativen Lösungsweg.
  Aufstellen des (erweiterten) Gleichungssystems:

  $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & = & 0 \end{array}$$

- Lösen des Gleichungssystems mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

  $$\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

  $\rightarrow$ Aus der zweiten und der dritten Zeile kann man ablesen, dass die Werte für x_2 und x_3 frei wählbar sind. D. h. für x_1 ergibt sich eine Lösung $x_1 = -2x_2 + 3x_3$. Für x_1 gibt es also **unendlich viele Lösungen**. Stellt man diese Lösung um, so erhält man: $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$. Dabei handelt es sich jedoch um eine der gegebenen Ebenengleichungen. $\rightarrow$ Die Ebenen sind **identisch**.

Ebenen schneiden sich

Aufgabe: Untersuchen sie die Lagebeziehung der zwei Ebenen E_1 und E_2 zueinander, und geben sie gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgeraden g an.

$$E_1 : 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 62 = 0$$

$$E_2 : 3x_1 - 4x_3 = 24$$

Lösung:

- Untersuchung, ob die Ebenen parallel sind:

  $$\frac{3}{4} = \frac{0}{1} = \frac{-4}{3}$$

  Dies ist nicht erfüllt, damit sind die Ebenen **nicht parallel** und auch **nicht identisch**.

- Da eine Lösung für die drei Unbekannten x_1, x_2 und x_3 gesucht wird, muss die Gleichung der Ebene 2 zunächst umgestellt werden:

  $$E_1 : 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 62$$

- Aufstellen des (erweiterten) Gleichungssystems:

  $$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 1x_2 & + & 3x_3 & = & 62 \\ 3x_1 & + & 0x_2 & - & 4x_3 & = & 24 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & = & 0 \end{array}$$

- Lösen des Gleichungssystems mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

  $$\begin{array}{rrr|r} 4 & 1 & 3 & 62 \\ 3 & 0 & -4 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrr|r} 12 & 3 & 9 & 186 \\ 12 & 0 & -16 & 96 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrr|r} 4 & 1 & 3 & 62 \\ 0 & 3 & 25 & 90 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

  → Aus der dritten Zeile kann man ablesen, dass x_3 frei wählbar ist: $x_3 = k$
  → Damit folgt aus der zweiten Zeile: $x_2 = 30 - \frac{25}{3} \cdot k$
  → Die erste Zeile liefert schließlich: $x_1 = 8 + \frac{4}{3} \cdot k$

- Da nun Ergebnisse für x_1, x_2 und x_3 vorliegen, kann man diese in einer Vektorschreibweise zusammenfassen:

  $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{25}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Hierbei handelt es sich offensichtlich um eine Geradengleichung - nämlich die der Schnittgeraden:

  $$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -25 \\ 3 \end{pmatrix}$$

11.4 Lösungsstrategie für eine Ebene in Parameterdarstellung, eine in parameterfreier Darstellung

Ist eine Ebene E_1 in Parameterdarstellung, eine zweite Ebene E_2 jedoch in parameterfreier Darstellung gegeben, so greifen die oben vorgestellten Lösungsstrategien nicht mehr.

Eine Möglichkeit wäre, die Ebene E_1 ebenfalls in die parameterfreie Normalenform umzurechnen (vgl. Kapitel 4). Nachfolgend soll noch eine Alternative aufgezeigt werden.

Zunächst gilt es, die Ebene in Parameterdarstellung in Zeilenschreibweise aufzuschlüsseln, und die Ausdrücke für x_1, x_2 und x_3 in die parameterfreie Gleichung der Ebene E_2 einzusetzen.

Als Ergebnis erhält man ...

... eine falsche Aussage (z. B. $5 = 0$)	$\rightarrow$	E_1 ist parallel zu E_2
... eine wahre Aussage (z. B. $2 = 2$)	$\rightarrow$	E_1 ist identisch mit E_2
... eine Gleichung (z. B. $2k - 5l + 1 = 0$)	$\rightarrow$	E_1 schneidet E_2 in g

Tritt der letzte Fall ein - es existiert also eine Schnittgerade g - so löst man die erhaltene Gleichung nach einem Parameter (entweder k oder l) auf, und setzt den Ausdruck in die Gleichung der Ebene in Parameterdarstellung ein. Nach etwas Umformungsarbeit erhält man die Gleichung der Schnittgeraden g.

11.4.1 Beispiele für eine Ebene in Parameterdarstellung, eine in parameterfreier Darstellung

Ebenen schneiden sich

Aufgabe: Untersuchen sie die Lagebeziehung der zwei Ebenen E_1 und E_2 zueinander, und geben sie gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgeraden g an.

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E_2 : 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2 = 0$$

Lösung:

- Ebene E_1 umformen in Zeilenschreibweise:
  $$\begin{aligned} x_1 &= 1 - l \\ x_2 &= 2 - k + 2l \\ x_3 &= -1 + k + 4l \end{aligned}$$
- Ausdrücke für x_1, x_2 und x_3 in E_2 einsetzen:
  $$4 \cdot (1 - l) + 2 \cdot (2 - k + 2l) - 1(-1 + k + 4l) + 2 = 0$$
  $$11 + 4l - 3k = 0$$
- Entweder nach k **oder** nach l auflösen:
  $$k = \frac{11}{3} + \frac{4}{3}l \qquad\qquad l = -\frac{11}{4} + \frac{3}{4}k$$
- Ausdruck für k (bzw. l) in E_1 einsetzen:
  k in E_1:
  $$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{11}{3} - \frac{4}{3}l \\ \frac{11}{3} + \frac{4}{3}l \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
  $$\text{Schnittgerade } g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{16}{3} \end{pmatrix}$$
  l in E_1:
  $$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{11}{4} - \frac{3}{4}k \\ -\frac{11}{2} + \frac{3}{2}k \\ -11 + 3k \end{pmatrix}$$
  $$\text{Schnittgerade } g : \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ -\frac{7}{2} \\ -12 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ebenen liegen parallel

Aufgabe: Untersuchen sie die Lagebeziehung der zwei Ebenen E_1 und E_2 zueinander, und geben sie gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgeraden g an.

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 : 5x_1 - 4x_2 - 13x_3 + 28 = 0$$

Lösung:

- Ausdrücke für x_1, x_2 und x_3 aus E_1 in E_2 einsetzen:

$$5 \cdot (2 + k + 5l) - 4 \cdot (3 - 2k + 3l) - 13 \cdot (2 + k + l) + 28 = 0$$

$$-13k = 0$$

- Da eine falsche Aussage herauskommt haben die Ebenen keine gemeinsamen Punkte $\rightarrow$ sie liegen parallel.

Ebenen sind identisch

Aufgabe: Untersuchen sie die Lagebeziehung der zwei Ebenen E_1 und E_2 zueinander, und geben sie gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgeraden g an.

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 : -5x_1 + 4x_2 + 13x_3 - 28 = 0$$

Lösung:

- Ausdrücke für x_1, x_2 und x_3 aus E_1 in E_2 einsetzen:

$$-5 \cdot (2 + k + 5l) + 4 \cdot (3 - 2k + 3l) + 13 \cdot (2 + k + l) - 28 = 0$$

$$0 = 0$$

- Da eine wahre Aussage herauskommt haben die Ebenen unendlich viele gemeinsamen Punkte $\rightarrow$ sie sind identisch.

11.5 Übungsaufgaben

Aufgaben

Überprüfen sie jeweils die Lage der zwei Ebenen zueinander, und geben sie gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgeraden an.

1. $E_1 : 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ und $E_2 : 7x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 0$
2. $E_1 : 5x_1 - x_2 = 6$ und $E_2 : -10x_1 + 2x_2 + 12 = 0$
3. $E_1 : x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -8$ und $E_2 : 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 = -6$
4. $E_1 : 8x_2 - 2x_3 + 5 = 0$ und $E_2 : 4x_2 - x_3 = 0$
5. $E_1 : x_3 - 3 = 0$ und $E_2 : 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 6$
6. $E_1 : -2x_1 + 5x_3 = -2$ und $E_2 : 3x_2 + 4 = 0$
7. $E_1 : x_1 - x_2 + 4x_3 - 1 = 0$ und $E_2 : 2x_1 + x_2 + x_3 + 2 = 0$

Lösungen

1. Schnittgerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{17} \\ \frac{3}{17} \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix}$
2. Sind identisch (Gleichung der Ebene 2 ist ein Vielfaches der Gleichung von E_1!)
3. Schnittgerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ 0 \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
4. Liegen echt parallel (Kein Ansatz über Gauß! Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten $\rightarrow$ falsche Aussage)
5. Schnittgerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
6. Schnittgerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{3} \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
7. Schnittgerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$