12 Übungsstunde Lagebeziehungen

12.1 Überblick

12.1.1 Bekannte Elemente und ihre Darstellungsformen

Element	$\mathbf{R}^2$	$\mathbf{R}^3$
Punkt	$P(x_1 \mid x_2)$	$P(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$
Gerade	$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3 = 0$	$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$
Ebene	$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$	$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0$

12.1.2 Mögliche Lagebeziehungen

Elemente	$\mathbf{R}^2$	$\mathbf{R}^3$
Gerade - Gerade	parallel identisch Schnittpunkt	parallel identisch Schnittpunkt windschief
Gerade - Ebene	g ∈ E	parallel g ∈ E Schnittpunkt
Ebene - Ebene	identisch	parallel identisch Schnittgerade

12.1.3 Wiederholung

Die Schüler sollen die nachfolgenden 10 Übungsaufgaben in kleinen Gruppen mit je 3 bis 4 Schülern arbeitsteilig bearbeiten, und ihre Ergebnisse im Anschluss daran selbst präsentieren.

12.2 Übungsaufgaben

Aufgabenblatt

Aufgabe 1
Untersuchen sie die Lagebeziehung der zwei Ebenen E_1 und E_2 zueinander, und geben sie wenn möglich eine Gleichung der Schnittgeraden g an.

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2
Untersuchen sie die Lagebeziehung der Geraden g_1 und g_2 zueinander und geben sie gegebenenfalls den Schnittpunkt an.

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3
Untersuchen sie die Gerade g und die Ebene E auf ihre Lagebeziehung zueinander, und geben sie - falls vorhanden - die Koordinaten des Schnittpunktes an.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4
Untersuchen sie die Lagebeziehung der Geraden g zur Ebene E und geben sie gegebenenfalls die Koordinaten eines Schnittpunktes an.

$$E : -2x_1 - 3x_2 + 31x_3 + 3 = 0$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

Untersuchen sie die Lagebeziehung der zwei Ebenen E_1 und E_2 zueinander, und geben sie wenn möglich eine Gleichung der Schnittgeraden g an.

$$E_1 : -3x_2 + \frac{9}{5}x_3 - 2 = 0$$

$$E_2 : 15x_2 - 9x_3 + 10 = 0$$

Aufgabe 6

Untersuchen sie die Lagebeziehung der zwei Ebenen E_1 und E_2 zueinander, und geben sie wenn möglich eine Gleichung der Schnittgeraden g an.

$$E_1 : x_2 + 2x_3 = 0$$

$$E_2 : 3x_1 - 8x_3 + 1 = 0$$

Aufgabe 7

Geben sie eine Gleichung der Geraden g_1, welche durch die Punkte $A(3 \mid 2)$ und $B(4 \mid 7)$ läuft an. Untersuchen sie anschließend die Lagebeziehung zwischen g_1 und g_2. Geben sie gegebenenfalls den Schnittpunkt an.

$$g_2 : -5x_1 + x_2 + 3 = 0$$

Aufgabe 8

Untersuchen sie die Lagebeziehung der zwei Ebenen E_1 und E_2 zueinander, und geben sie wenn möglich eine Gleichung der Schnittgeraden g an.

$$E_1 : 6x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3 = 0$$

$$E_2 : 18x_1 + 6x_2 - 6x_3 + 18 = 0$$

Aufgabe 9

Untersuchen sie die Lagebeziehung der zwei Ebenen E_1 und E_2 zueinander, und geben sie wenn möglich eine Gleichung der Schnittgeraden g an.

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10

Untersuchen sie die Lagebeziehung der Geraden g zur Ebene E, und geben sie wenn möglich die Koordinaten eines Schnittpuntes S an.

$$E : -23x_1 + 29x_2 + 25x_3 - 70 = 0$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösungen der Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Ebene schneidet Ebene

Untersuchen sie die Lagebeziehung der zwei Ebenen E_1 und E_2 zueinander, und geben sie wenn möglich eine Gleichung der Schnittgeraden g an.

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lösung:

- Die Gleichung einer Ebene (hier: E_2) parameterfrei machen

$$\begin{array}{lrcl} I) & x_1 & = & 9 \\ II) & x_2 & = & 2 + m - n \\ III) & x_3 & = & 6 + m + 5n \end{array}$$

  Hier ist die parameterfreie Ebenengleichung bereits ablesbar: $E^* : x_1 - 9 = 0$

- Die Gleichung der anderen Ebene (hier: E_1) zeilenweise anschreiben

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 7 + k - l \\ x_2 & = & -3 + k + 2l \\ x_3 & = & 3 + l \end{array}$$

- Ausdruck für x_1 in E^* einsetzen

$$7 + k + l - 9 = 0$$

$$\rightarrow k = 2 - l$$

- Ausdruck für k in Ebenengleichung von E_1 einsetzen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + (2 - l) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 - l \\ 2 - l \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{Schnittgerade } g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Gerade schneidet Gerade

Untersuchen sie die Lagebeziehung der Geraden g_1 und g_2 zueinander und geben sie gegebenenfalls den Schnittpunkt an.

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

- Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig?

  $\frac{4}{-7} = \frac{2}{1} = \frac{-1}{-1}$? falsch $\rightarrow$ lin. unabh. $\rightarrow$ Schnittpunkt oder windschief

- Gibt es einen Schnittpunkt?

$$\begin{array}{llcl} I) & 1+4k & = & -2-7l \\ II) & 1+2k & = & 4+l \\ III) & -2-k & = & -4-l \end{array}$$

II + III	**II + 2*III**
$1+2k = 4+l$	$1+2k = 4+l$
$-2-k = -4-l$	$-4-2k = -8-2l$
$-1+k = 0$	$-3 = -4-l$
$\rightarrow k=1$	$\rightarrow l=-1$

$k=1$ und $l=-1$in I: $\quad 1+4\cdot 1 = -2-7\cdot(-1)$

$\rightarrow 5=5 \rightarrow$ wahre Aussage $\rightarrow$ *Schnittpunkt*

- Schnittpunkt berechnen

$k=1$ in $g_1 \rightarrow$ Schnittpunkt: $S(5 \mid 3 \mid -3)$

oder

$l=-1$ in $g_2 \rightarrow$ Schnittpunkt: $S(5 \mid 3 \mid -3)$

Aufgabe 3: Gerade schneidet Ebene

Untersuchen sie die Gerade g und die Ebene E auf ihre Lagebeziehung zueinander, und geben sie - falls vorhanden - die Koordinaten des Schnittpunktes an.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

- Entscheide ob $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig. $\rightarrow$ Gaußsches Eliminationsverfahren.

$$\begin{array}{rrr} -1 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr} -1 & -5 & 2 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & -26 & 13 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr} -1 & -5 & 2 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ lin. abh.

- Bildung des Differenzvektors der Aufpunkte

$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- Untersuchung ob $(\vec{a}_2 - \vec{a}_1), \vec{v}, \vec{w}$ lin. abhängig $\rightarrow$ Gaußsches Eliminationsverfahren.

$$\begin{array}{rrr} -6 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr} -12 & -10 & 4 \\ -12 & 9 & 0 \\ -12 & 16 & 4 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr} -12 & -10 & 4 \\ 0 & -19 & 4 \\ 0 & -26 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr} -12 & -10 & 4 \\ 0 & -19 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{96}{19} \end{array}$$

$\Rightarrow (\vec{a}_2 - \vec{a}_1), \vec{v}, \vec{w}$ lin. unabh.

- $\Rightarrow$ Die Gerade liegt echt parallel zur Ebene.

Aufgabe 4: Gerade liegt in der Ebene

Untersuchen sie die Lagebeziehung der Geraden g zur Ebene E und geben sie gegebenenfalls die Koordinaten eines Schnittpunktes an.

$$E : -2x_1 - 3x_2 + 31x_3 + 3 = 0$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

- Aus der Geradengleichung erhält man:
  $x_1 = -4 + 5r$
  $x_2 = 14 + 7r$
  $x_3 = 1 + r$
- Terme für x_1, x_2 und x_3 werden in die Ebenengleichung eingesetzt.

$$-2(-4 + 5r) - 3(14 + 7r) + 31(1 + r) + 3 = 0$$

- Gleichung wenn möglich nach r auflösen

$$0 \cdot r = 0$$

- Diese Gleichung ist allgemeingültig. Für r können beliebige Werte eingesetzt werden. → Die Gerade liegt in der Ebene.

Aufgabe 5: Zwei identische Ebenen

Untersuchen sie die Lagebeziehung der zwei Ebenen E_1 und E_2 zueinander, und geben sie wenn möglich eine Gleichung der Schnittgeraden g an.

$$E_1 : -3x_2 + \frac{9}{5}x_3 - 2 = 0$$

$$E_2 : 15x_2 - 9x_3 + 10 = 0$$

Lösung:

- Untersuchung, ob die Ebenen parallel sind

$$\frac{-3}{15} = \frac{\frac{9}{5}}{-9} \quad ? \qquad \to \text{richtig} \to E_1 \text{ ist parallel zu } E_2$$

- Untersuchung, ob die Ebenen sogar identisch sind

$$\frac{-3}{15} = \frac{\frac{9}{5}}{-9} = \frac{-2}{10} \quad ? \qquad \to \text{richtig} \to E_1 \text{ ist identisch mit } E_2$$

$\to$ Die Ebenen sind identisch.

Aufgabe 6: Ebene schneidet Ebene

Untersuchen sie die Lagebeziehung der zwei Ebenen E_1 und E_2 zueinander, und geben sie wenn möglich eine Gleichung der Schnittgeraden g an.

$$E_1 : x_2 + 2x_3 = 0$$

$$E_2 : 3x_1 - 8x_3 + 1 = 0$$

Lösung:

- Untersuchung, ob die Ebenen parallel sind
  Der nachfolgende Ansatz darf wegen der Division durch Null eigentlich gar nicht angeschrieben werden. Zur besseren Veranschaulichung ist er dennoch aufgeführt.

  $$\frac{3}{0} = \frac{0}{1} = \frac{-8}{2} \quad ? \qquad \rightarrow \text{falsch}$$

  $\rightarrow$ E_1 ist nicht parallel zu E_2, und kann damit auch nicht identisch mit E_2 sein.

- Aufstellen des (erweiterten) Gleichungssystems

  $$\begin{array}{rcrcrcr} 0x_1 & + & 1x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 0x_2 & - & 8x_3 & = & -1 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & = & 0 \end{array}$$

- Lösen des Gleichungssystems mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

  $$\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} 3 & 0 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

  $\rightarrow$ Aus der dritten Zeile kann man ablesen, dass x_3 frei wählbar ist: $x_3 = k$
  $\rightarrow$ Damit folgt aus der zweiten Zeile: $x_2 = -2 \cdot k$
  $\rightarrow$ Die erste Zeile liefert schließlich: $x_1 = -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} \cdot k$

- Da nun Ergebnisse für x_1, x_2 und x_3 vorliegen, kann man diese in einer Vektorschreibweise zusammenfassen:

  $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Hierbei handelt es sich offensichtlich um eine Geradengleichung; nämlich die der Schnittgeraden. Das Ergebnis lässt sich noch etwas „verschönern“ indem der Richtungsvektor mit dem Faktor 3 multipliziert wird.

  $$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: Gerade parallel zu Gerade

Geben sie eine Gleichung der Geraden g_1, welche durch die Punkte $A(3 \mid 2)$ und $B(4 \mid 7)$ läuft an. Untersuchen sie anschließend die Lagebeziehung zwischen g_1 und g_2. Geben sie gegebenenfalls den Schnittpunkt an.

$$g_2 : -5x_1 + x_2 + 3 = 0$$

Lösung:

- Aufstellen der Geradengleichung

$$g_1 : \vec{x} = \vec{a} + k \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Umrechnen von g_1 in parameterfreie Form

$$\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{c}{\textbf{I + (-5)*II}} \\ \hline\hline -5 \cdot x_1 & = & -15 - 5 \cdot k \\ x_2 & = & 2 + 5 \cdot k \\ \hline -5 \cdot x_1 + x_2 & = & -13 \\ \multicolumn{3}{l}{\rightarrow -5 \cdot x_1 + x_2 + 13 = 0} \end{array}$$

- Quotienten bilden und vergleichen

$$\frac{-5}{-5} = \frac{1}{1} \quad ? \qquad \text{richtig} \rightarrow \text{parallel}$$

$$\frac{-5}{-5} = \frac{1}{1} = \frac{13}{3} \qquad \text{falsch} \rightarrow \textbf{nicht} \text{ identisch}$$

$\rightarrow$ Die Geraden liegen parallel zueinander

Aufgabe 8: Zwei parallele Ebenen

Untersuchen sie die Lagebeziehung der zwei Ebenen E_1 und E_2 zueinander, und geben sie wenn möglich eine Gleichung der Schnittgeraden g an.

$$E_1 : 6x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3 = 0$$

$$E_2 : 18x_1 + 6x_2 - 6x_3 + 18 = 0$$

Lösung:

- Untersuchung, ob die Ebenen parallel sind

$$\frac{6}{18} = \frac{2}{6} = \frac{-2}{-6} \quad ? \qquad \rightarrow \text{richtig} \rightarrow E_1 \text{ ist parallel zu } E_2$$

- Untersuchung, ob die Ebenen sogar identisch sind

$$\frac{6}{18} = \frac{2}{6} = \frac{-2}{-6} = \frac{3}{18} \quad ? \qquad \rightarrow \text{falsch} \rightarrow E_1 \text{ ist } \textbf{nicht} \text{ identisch mit } E_2$$

$\rightarrow$ Die Ebenen liegen parallel zueinander.

Aufgabe 9: Ebene schneidet Ebene

Untersuchen sie die Lagebeziehung der zwei Ebenen E_1 und E_2 zueinander, und geben sie wenn möglich eine Gleichung der Schnittgeraden g an.

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

- Die Gleichung einer Ebene (hier: E_1) parameterfrei machen

$$\begin{array}{lll} I) & x_1 = & 1 + 2k \\ II) & x_2 = & k + l \\ III) & x_3 = & 2l \end{array}$$

-2*II + III:

$$\begin{array}{rcl} -2x_2 & = & -2k - 2l \\ x_3 & = & 2l \\ \hline -2x_2 + x_3 & = & -2k \\ \multicolumn{3}{l}{\rightarrow k = x_2 - \frac{1}{2}x_3} \end{array}$$

Ausdruck für k in I: $x_1 = 1 + 2x_2 - x_3$

$$\rightarrow E^* : x_1 - 2x_2 + x_3 - 1 = 0$$

- Die Gleichung der anderen Ebene (hier: E_2) zeilenweise anschreiben

$$\begin{array}{lll} x_1 & = & -m + n \\ x_2 & = & 1 - 2n \\ x_3 & = & -m \end{array}$$

- Ausdrücke für x_1, x_2 und x_3 in E^* einsetzen

$$-m + n - 2 + 4n - m - 1 = 0$$

$$-2m + 5n - 3 = 0$$

- Gleichung mit m und n nach einer Unbekannten (hier: m) auflösen

$$\rightarrow m = \frac{5}{2}n - \frac{3}{2}$$

- Ausdruck für m in Ebenengleichung von E_2 einsetzen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\frac{5}{2}n - \frac{3}{2}) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}n + \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{5}{2}n + \frac{3}{2} \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -2 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

- Angabe einer „verschönerten“ Gleichung der Schnittgeraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10: Gerade parallel zu Ebene

Untersuchen sie die Lagebeziehung der Geraden g zur Ebene E, und geben sie wenn möglich die Koordinaten eines Schnittpuntes S an.

$$E : -23x_1 + 29x_2 + 25x_3 - 70 = 0$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

- Geradengleichung zeilenweise anschreiben

$$\begin{aligned} x_1 &= 19 + 2r \\ x_2 &= 7 - r \\ x_3 &= 10 + 3r \end{aligned}$$

- Ausdrücke für x_1, x_2 und x_3 in Ebenengleichung einsetzen

$$-23(19 + 2r) + 29(7 - r) + 25(10 + 3r) - 70 = 0$$

$$-437 - 46r + 261 - 29r + 250 + 75r - 70 = 0$$

$$4 + 0r = 0$$

$\rightarrow$ Dies ist eine falsche Aussage.

$\rightarrow$ Die Gerade liegt parallel zur Ebene