

13 Spurpunkte und Spurgeraden

13.1 Spurpunkte einer Geraden

Möglicher Einstieg: Ein Schwimmer springt von einem Sprungturm in das Schwimmbecken. In erster Näherung kann man die Flugbahn als Ausschnitt einer Geraden ansehen. Die Wasseroberfläche wird genau in einem Punkt durchstoßen. Wo liegt dieser Punkt? Um diese Frage zu klären werden entlang der Beckenränder und des Sprungturmes Achsen eingezeichnet.

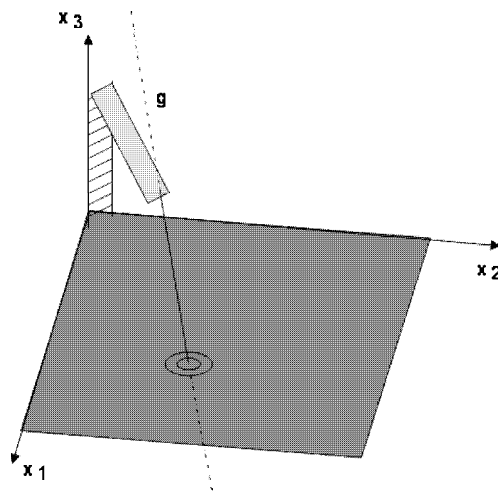


Abbildung 33: Illustration für Einstieg

Eine Gerade im \mathbf{R}^3 besitzt im allgemeinen Fall je einen Schnittpunkt mit jeder Koordinatenebene. Sie hat also in der Regel drei Spurpunkte.

Der (eindeutige) Schnittpunkt einer Geraden g mit einer Koordinatenebene heißt Spurpunkt der Geraden g .

10cm

Es gibt aber einige Sonderfälle:

- Die Gerade liegt parallel zu einer Koordinatenebene, bzw. enthält diese.
→ Es gibt nur zwei Spurpunkte.
- Die Gerade liegt parallel zu einer Koordinatenachse.
→ Es gibt nur einen Spurpunkt.
- Die Gerade schneidet eine Koordinatenachse.
→ Zwei Spurpunkte fallen zusammen und haben die gleichen Koordinaten.

- Die Gerade geht durch den Ursprung.
→ Alle drei Spurpunkte fallen zusammen und haben die gleichen Koordinaten.

13.1.1 Berechnung der Spurpunkte

Der Spurpunkt einer Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + k \cdot \vec{u}$ mit der x_1x_2 -Ebene soll berechnet werden.

- Vorüberlegung: In der x_1x_2 -Ebene gilt immer: $x_3 = 0$.
- $x_3 = 0$ in die dritte Zeile der Geradengleichung einsetzen.

$$0 = a_3 + k \cdot u_3$$

- Wert für k berechnen

$$k = -\frac{a_3}{u_3}$$

Ist $u_3 = 0$, gibt es keinen Spurpunkt in der x_1x_2 -Ebene. Die Gerade liegt dann parallel zur x_1x_2 -Ebene, oder ganz in der x_1x_2 -Ebene.

- Wert für k in Geradengleichung einsetzen und damit die Koordinaten des Spurpunktes bestimmen.

$$\vec{x} = \vec{a} - \frac{a_3}{u_3} \cdot \vec{u}$$

Das Vorgehen für die beiden anderen Spurpunkte ist analog.

Beispiele: Berechnung der Spurpunkte

Beispiel 1: Beliebige Gerade

Aufgabe: Gegeben sei die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$. Berechnen sie die Spurpunkte der Geraden.

Lösung:

x_1x_2 -Ebene $\rightarrow x_3 = 0$

$$x_3 = 0 \text{ in } x_3 = 5 - 2k \quad \rightarrow k = 2,5$$

$$\text{Spurpunkt in } x_1x_2\text{-Ebene: } \vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + 2,5 \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{S_{12}(17 \mid -20,5 \mid 0)}}$$

x_2x_3 -Ebene $\rightarrow x_1 = 0$

$$x_1 = 0 \text{ in } x_1 = 2 + 6k \quad \rightarrow k = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Spurpunkt in } x_2x_3\text{-Ebene: } \vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{S_{23}(0 \mid -\frac{2}{3} \mid \frac{17}{3})}}$$

x_1x_3 -Ebene $\rightarrow x_2 = 0$

$$x_2 = 0 \text{ in } x_2 = -3 - 7k \quad \rightarrow k = -\frac{3}{7}$$

$$\text{Spurpunkt in } x_1x_3\text{-Ebene: } \vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{3}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{S_{13}(-\frac{4}{7} \mid 0 \mid \frac{41}{7})}}$$

Beispiel 2: Gerade parallel zur x_1x_3 -Ebene

Aufgabe: Gegeben sei die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechnen sie die Spurpunkte der Geraden.

Lösung:

x_1x_2 -Ebene $\rightarrow x_3 = 0$

$$x_3 = 0 \text{ in } x_3 = 3 + 2k \quad \rightarrow k = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Spurpunkt in } x_1x_2\text{-Ebene: } \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{S_{12}(2,5 \mid 2 \mid 0)}}$$

x_2x_3 -Ebene $\rightarrow x_1 = 0$

$$x_1 = 0 \text{ in } x_1 = 1 - k \quad \rightarrow k = 1$$

$$\text{Spurpunkt in } x_2x_3\text{-Ebene: } \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{S_{23}(0 \mid 2 \mid 5)}}$$

x_1x_3 -Ebene $\rightarrow x_2 = 0$

$$x_2 = 0 \text{ in } x_2 = 2 + 0k \quad \rightarrow k = \text{beliebig}$$

\rightarrow Es gibt keinen Spurpunkt in der x_1x_3 -Ebene.

Beispiel 3: Gerade durch Ursprung

Aufgabe: Gegeben sei die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen sie die Spurpunkte der Geraden.

Lösung:

$$x_1x_2\text{-Ebene} \rightarrow x_3 = 0$$

$$x_3 = 0 \text{ in } x_3 = -2 + k \quad \rightarrow k = 2$$

$$\text{Spurpunkt in } x_1x_2\text{-Ebene: } \vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{S_{12}(0|0|0)}}$$

$$x_2x_3\text{-Ebene} \rightarrow x_1 = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ in } x_1 = -2 + k \quad \rightarrow k = 2$$

$$\text{Spurpunkt in } x_2x_3\text{-Ebene: } \vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{S_{23}(0|0|0)}}$$

$$x_1x_3\text{-Ebene} \rightarrow x_2 = 0$$

$$x_2 = 0 \text{ in } x_2 = 4 - 2k \quad \rightarrow k = 2$$

$$\text{Spurpunkt in } x_1x_3\text{-Ebene: } \vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{S_{23}(0|0|0)}}$$

13.2 Spurgeraden einer Ebene

Möglicher Einstieg: Der Einstieg zu den Spurpunkten der Geraden wird erweitert. Im Schwimmbad gibt es eine Mauer, die zum Abtrennen des Schwimmer vom Nichtschwimmerbereiches hochgefahren werden kann. Durchstößt diese Mauer die Wasseroberfläche, so entspricht das einer Spurgeraden.

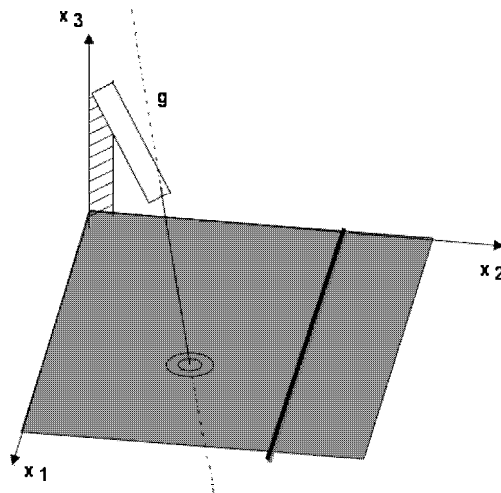


Abbildung 34: Illustration für Einstieg

Schneidet eine Ebene in einem kartesischen Koordinatensystem eine der drei Koordinatenebenen x_1x_2 , x_2x_3 oder x_1x_3 , so erhält man natürlich eine Schnittgerade.

Die Schnittgerade einer beliebigen Ebene E mit einer Koordinatenebene heißt Spurgerade der Ebene E .

10cm

Nimmt die Ebene E im Koordinatensystem keine besondere Lage ein (siehe unten „Sonderfälle“), so hat sie stets drei **Spurgeraden**. Immer zwei dieser Geraden treffen sich genau in einem Punkt auf einer Koordinatenachse. Dieser Punkt entspricht dem **Achsenabschnittspunkt**, welcher aus der Achsenabschnittsform einer Ebene direkt ablesbar ist.

Verbindet man die drei Achsenabschnittspunkte, so erhält man das **Spurdreieck** (siehe Abbildung 35).

Es gibt aber zwei Sonderfälle:

- Die Ebene liegt parallel zu einer Koordinatenachse, bzw. enthält diese sogar (siehe Abbildung 36).
→ Es gibt nur zwei bzw. unendlich viele Achsenabschnittspunkte.

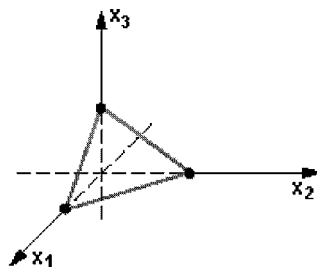


Abbildung 35: Spurdreieck einer Ebene

- Die Ebene liegt parallel zu einer Koordinatenebene, bzw. ist mit ihr sogar identisch (siehe Abbildung 37).
→ Es gibt nur einen bzw. unendlich viele Achsenabschnittpunkte.

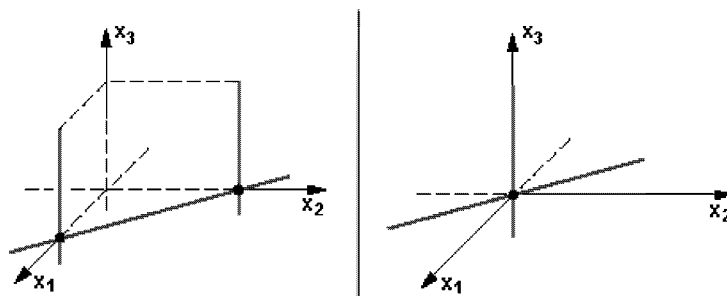


Abbildung 36: Ebene parallel zu einer Koordinatenachse

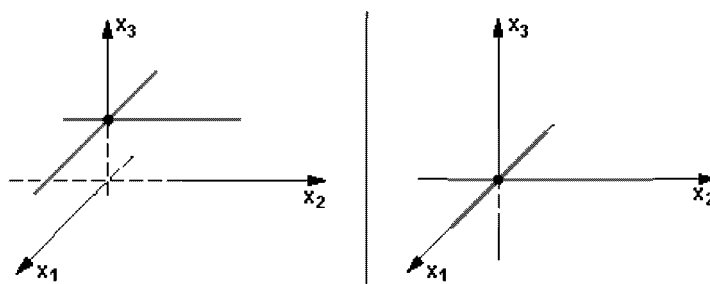


Abbildung 37: Ebene parallel zu einer Koordinatenebene

13.2.1 Berechnung der Spurgeraden über den Schnitt zweier Ebenen

Die Spurgerade einer Ebene $E : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0$ mit der x_1x_2 -Ebene soll berechnet werden.

- Vorüberlegung: In der x_1x_2 -Ebene gilt immer: $x_3 = 0$.
- $x_3 = 0$ in Ebenengleichung einsetzen: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_4 = 0$
Dies kann als die Gleichung der Spurgeraden im zweidimensionalen Koordinatensystem der x_1x_2 -Ebene interpretiert werden.
- Diese Gleichung muss für alle Koordinatenpaare lösbar sein.
→ Es werden zwei beliebige Werte für x_1 (x_2) ausgewählt, in die Gleichung der Spurgeraden eingesetzt, und x_2 (x_1) berechnet.
- Die gewählten Werte für x_1 (x_2) und die berechneten Werte für x_2 (x_1) ergeben zusammen mit der Vorüberlegung $x_3 = 0$ zwei Punkte auf der Spurgeraden.
- Aus den zwei Punkten kann die Geradengleichung der Spurgeraden in Parameterdarstellung aufgestellt werden.

Das Vorgehen für die beiden anderen Spurgeraden ist analog.

Beispiele: Berechnung der Spurgeraden über den Schnitt zweier Ebenen

Beispiel 1: Beliebige Ebene

Aufgabe: Gegeben sei die Ebene $E : 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 24 = 0$. Berechnen sie die Spurgeraden.

Lösung:

$$x_1x_2\text{-Ebene} \rightarrow x_3 = 0$$

einsetzen in Ebenengleichung: $3x_1 - 4x_2 + 24 = 0$

$$\text{Wahl: } x_1 = 0 \rightarrow 3 \cdot 0 - 4x_2 + 24 = 0 \rightarrow x_2 = 6 \rightarrow P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Wahl: } x_1 = 2 \rightarrow 3 \cdot 2 - 4x_2 + 24 = 0 \rightarrow x_2 = 7,5 \rightarrow P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gleichung der Spurgeraden: } g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 7,5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\underline{\underline{g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

$$x_1x_3\text{-Ebene} \rightarrow x_2 = 0$$

einsetzen in Ebenengleichung: $3x_1 + 6x_3 + 24 = 0$

$$\text{Wahl: } x_1 = 1 \rightarrow 3 \cdot 1 + 6x_3 + 24 = 0 \rightarrow x_3 = -\frac{27}{6} \rightarrow P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{27}{6} \end{pmatrix}$$

$$\text{Wahl: } x_1 = 0 \rightarrow 3 \cdot 0 + 6x_3 + 24 = 0 \rightarrow x_3 = -\frac{27}{6} \rightarrow P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{27}{6} \end{pmatrix}$$

$$\text{Gleichung der Spurgeraden: } g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{27}{6} \end{pmatrix} + k \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{27}{6} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{27}{6} \end{pmatrix} \right)$$

$$\underline{\underline{g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{27}{6} \end{pmatrix}}}$$

$$x_2x_3\text{-Ebene} \rightarrow x_1 = 0$$

$$\text{einsetzen in Ebenengleichung: } -4x_2 + 6x_3 + 24 = 0$$

$$\text{Wahl: } x_2 = 0 \quad \rightarrow -4 \cdot 0 + 6x_3 + 24 = 0 \quad \rightarrow x_3 = -4 \quad \rightarrow P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Wahl: } x_3 = 0 \quad \rightarrow -4x_2 + 6 \cdot 0 + 24 = 0 \quad \rightarrow x_2 = 6 \quad \rightarrow P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gleichung der Spurgeraden: } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\underline{\underline{g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}}}$$

Beispiel 2: Ebene parallel zu x_3 -Achse

Aufgabe: Gegeben sei die Ebene $E : 2x_1 + 5x_2 + 7 = 0$. Berechnen sie die Spurgeraden der Ebene.

Lösung:

$$x_1x_2\text{-Ebene} \rightarrow x_3 = 0 \rightarrow 2x_1 + 5x_2 + 7 = 0$$

$$\text{Wahl: } x_1 = 0 \rightarrow 2 \cdot 0 + 5x_2 + 7 = 0 \rightarrow x_2 = -\frac{7}{5} \rightarrow P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{7}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Wahl: } x_1 = 1 \rightarrow 2 \cdot 1 + 5x_2 + 7 = 0 \rightarrow x_2 = -\frac{9}{5} \rightarrow P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{9}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Spurgerade : } g : \vec{x} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{7}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

$$x_2x_3\text{-Ebene} \rightarrow x_1 = 0 \rightarrow 5x_2 + 7 = 0$$

$$\text{Durch umstellen: } x_2 = -\frac{7}{5} \rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{7}{5} \\ \text{beliebig} \end{pmatrix}$$

$$\text{Spurgerade : } g : \vec{x} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{7}{5} \\ 9^* \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

$$x_1x_3\text{-Ebene} \rightarrow x_2 = 0 \rightarrow 2x_1 + 7 = 0$$

$$\text{Durch umstellen: } x_1 = -\frac{7}{2} \rightarrow P = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 0 \\ \text{beliebig} \end{pmatrix}$$

$$\text{Spurgerade : } g : \vec{x} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 0 \\ -6^* \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

* dieser Wert ist frei gewählt

Beispiel 3: Ebene identisch mit x_2x_3 -Ebene

Aufgabe: Gegeben sei die Ebene $E : 3x_1 = 0$. Berechnen sie die Spurgeraden der Ebene.

Lösung:

$$x_1x_2\text{-Ebene} \rightarrow x_3 = 0 \quad \rightarrow 3x_1 = 0$$

$$\rightarrow x_1 = 0 \quad \rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{beliebig} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Spurgerade : } g : \vec{x} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 7^* \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

$$x_2x_3\text{-Ebene} \rightarrow x_1 = 0$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{beliebig} \\ \text{beliebig} \end{pmatrix}$$

$$\text{Spurgerade : } g : \vec{x} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ -2^* \\ 1^* \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

$$x_1x_3\text{-Ebene} \rightarrow x_2 = 0 \quad \rightarrow 3x_1 = 0$$

$$\rightarrow x_1 = 0 \quad \rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{beliebig} \end{pmatrix}$$

$$\text{Spurgerade : } g : \vec{x} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3^* \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

* dieser Wert ist frei gewählt

13.2.2 Berechnung der Spurgeraden über die Achsenabschnittspunkte

Die Spurgerade einer Ebene $E : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0$ mit der x_1x_2 -Ebene soll berechnet werden.

- Ebenengleichung in die Achsenabschnittsform $\frac{x_1}{s} + \frac{x_2}{t} + \frac{x_3}{u} = 1$ umwandeln.
- Koordinaten der Achsenabschnittspunkte S, T und U ablesen.
- Gleichungen der Spurgeraden aufstellen:
 - x_1x_2 -Ebene: Gerade ST
 - x_2x_3 -Ebene: Gerade TU
 - x_1x_3 -Ebene: Gerade SU

Beispiel: Berechnung der Spurgeraden über die Achsenabschnittspunkte

Beispiel 1: Beliebige Ebene

Aufgabe: Gegeben sei die Ebene $E : 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 24 = 0$. Berechnen sie die Spurgeraden.

Lösung:

- Geradengleichung in Achsenabschnittsform

$$\frac{x_1}{-8} + \frac{x_2}{6} + \frac{x_3}{-4} = 1$$

- Ablesen der Achsenabschnittspunkte

$$S(-8 | 0 | 0) \quad T(0 | 6 | 0) \quad U(0 | 0 | -4)$$

- Spurgeraden berechnen

$$x_1x_2\text{-Ebene: Spurgerade } ST: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2x_3\text{-Ebene: Spurgerade } TU: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$x_1x_3\text{-Ebene: Spurgerade } SU: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2: Ebene parallel zu x_3 -Achse

Aufgabe: Gegeben sei die Ebene $E : 2x_1 + 5x_2 + 7 = 0$. Berechnen sie die Spurgeraden der Ebene.

Lösung:

- Geradengleichung in Achsenabschnittsform

$$\frac{x_1}{-\frac{7}{2}} + \frac{x_2}{-\frac{7}{5}} = 1$$

- Ablesen der Achsenabschnittspunkte

$$S(-\frac{7}{2} | 0 | 0) \quad T(0 | -\frac{7}{5} | 0) \quad U \text{ ist nicht vorhanden}$$

- Spurgeraden berechnen

$$x_1x_2\text{-Ebene: Spurgerade ST: } \underline{\underline{\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{7}{5} \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

Da es keinen Achsenabschnittspunkt U gibt, muss die Ebene parallel zu x_3 verlaufen. D. h. die beiden anderen Spurgeraden müssen durch die Achsenabschnittspunkten S und T parallel zu x_3 verlaufen.

$$x_2x_3\text{-Ebene: } \underline{\underline{\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{7}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

$$x_1x_3\text{-Ebene: } \underline{\underline{\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

Beispiel 3: Ebene identisch mit x_2x_3 -Ebene

Aufgabe: Gegeben sei die Ebene $E : 3x_1 = 0$. Berechnen sie die Spurgeraden der Ebene.

Lösung:

Mit dieser Methode nicht möglich, da keine Achsenabschnittsform existiert.

Index

- Abhängigkeit, lineare, 54
- Abstand
 - Ebene-Ebene, 46
 - Gerade-Gerade, 41, 42
 - Punkt-Ebene, 39
 - Punkt-Gerade, 35, 37
- Achsenabschnittspunkt, 61, 75, 133
- Dreieck
 - Fläche, 28
- Ebene
 - Abstand zu Ebene, 46
 - Abstand zu Punkt, 39
 - Achsenabschnittsform, 75
 - Drei-Punkte-Form, 64
 - Normalenform, 33, 72
 - parameterfrei, 72
 - Punkt und Gerade, 67
 - Punkt-Richtungs-Form, 63
 - Winkel, 51, 52
 - zwei parallele Geraden, 69
 - Zwei schneidende Geraden, 66
- Fläche
 - Dreieck, 28
 - Parallelogramm, 28
- Freier Vektor, 10
- Gaußsches Eliminationsverfahren, 6
- Gerade
 - Abstand zu Gerade, 41, 42
 - Abstand zu Punkt, 35, 37
 - Achsenabschnittsform, 60
 - Normalenform, 59
 - Parameterdarstellung, 58
 - Winkel, 49, 51
- HESSEsche Normalenform, 33
- Lagebeziehung
 - Ebene-Ebene, 105–113
 - Gerade-Ebene, 96–104
 - Gerade-Gerade, 82–95
- Normalenform einer Ebene, 33
- Ortsvektor, 9
- Parallelepiped, 31
- Parallelfach, 31
- Parallelogramm
 - Fläche, 21, 23, 28
- Projektion eines Vektors, 19
- Punkt
 - Abstand zu Ebene, 39
 - Abstand zu Gerade, 35, 37
 - Spiegelung, 47
- Punkte, 8
- Rechte-Hand-Regel, 24
- Rechtssystem, 24
- Skalarprodukt, 12
- Spat
 - Volumenberechnung, 31
- Spiegelung eines Punktes, 47
- Spurgerade, 133
- Spurpunkt, 128
- Vektor
 - Betrag, 17
 - freier, 10
 - Länge, 17
 - Ortsvektor, 9
 - Projektion auf anderen, 19
 - Winkel, eingeschlossener, 18
- Vektoren
 - Rechtssystem, 24
- Vektorprodukt, 22
- Winkel zwischen
 - Gerade und Ebene, 51
 - zwei Ebenen, 52
 - zwei Geraden, 49