Exponential- und Logarithmusfunktion

(BOS 12. Jahrgangsstufe)

Stand: 7. Mai 2005

Kontakt und weitere Infos:
www.barmetler.de

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **3**

1.1 Die Euler'sche Zahl 3

1.2 Die Exponentialfunkion 3

1.2.1 Exponentielles Wachstum 4

1.2.2 Exponentielle Abnahme 4

1.3 Der Logarithmus 5

1.4 Besondere Logarithmen 6

2 Graphen **7**

2.1 Graph einer Exponentialfunktion 7

2.2 Graph einer Logarithmusfunktion 8

3 Rechenregeln **10**

3.1 Exponentialfunktionen 10

3.2 Logarithmen 10

4 Differenzialrechnung **12**

4.1 Ableitung der Exponentialfunktion 12

4.2 Ableitung der Logarithmusfunktion 13

5 Integralrechnung **21**

5.1 Integration einer Exponentialfunktion 21

5.2 Logarithmen und Integrale 22

5.2.1 Der Logarithmus ausgedrückt als Integral 22

1 Einführung

1.1 Die Euler'sche Zahl

Die Euler'sche Zahl kann unter anderem durch Grenzwertbildung definiert werden. Die zwei bekanntesten Darstellungen lauten:

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = 2,71828\ldots$$

Die Folge der Summen ist zur näherungsweisen Berechnung der Euler'schen Zahl viel besser geeignet als die Folge der Produkte $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, da diese außerordentlich langsam konvergiert.

Den Grenzwert der zweiten Formel kann man folgendermaßen deuten:
Jemand zahlt am 1. Januar einen Euro auf der Bank ein. Die Bank garantiert ihm eine momentane Verzinsung zu einem Zinssatz von 100%. Wie groß ist sein Guthaben am 1. Januar des nächsten Jahres?

Nach der Zinseszinsformel ist das Kapital nach n Verzinsungen $K_n = K_0 \cdot (1+p)^n$, wobei K_0 das Startkapital, p der Zinssatz, und n die Anzahl der Verzinsungen sind.

In unseren Beispiel sind $K_0 = 1$ EUR, $p = 100\% = 1$, wenn der Zinszuschlag jährlich erfolgt, oder $p = \frac{100\%}{n} = \frac{1}{n}$, wenn der Zinszuschlag n mal im Jahr erfolgt.

Bei jährlichem Zuschlag wäre $K_1 = 1 \cdot (1+1)^1\, EUR = 2,00$ EUR. Bei halbjährlichem Zuschlag hat man $p = \frac{1}{2}$, also $K_2 = 1 \cdot (1+0,5)^2\, EUR = 2,25$ EUR, also schon etwas mehr. Bei täglicher Verzinsung ($p = \frac{1}{365}$) erhalten wir $K_{365} = 1 \cdot \left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2,714567\ldots\, EUR$.

Wenn man momentan verzinst, wird n unendlich groß, und man bekommt die oben angegebene 2. Formel für die Euler'sche Zahl e.

1.2 Die Exponentialfunkion

Wird in einer Potenz $y = a^n$ der Exponent nicht mehr als feste Zahl, sondern als freie Variable angesehen, so wird durch diese Zuordnungsvorschrift jedem x-Wert eindeutig ein y-Wert zugeordnet. Es ist eine reelle Funktion $x \to a^x$ definiert worden.

Die Funktion f, die durch die Zuordnung $x \rightarrow a^x$ mit $a \in \mathbf{R}^+$ und $x \in \mathbf{R}$ festgelegt ist, heißt allgemeine Exponentialfunktion oder kurz Exponentialfunkion zur Basis a.

Der Graph einer Exponentialfunktion heißt Exponentialkurve.

Wird in einer Exponentialfunktion die Basis a durch die Euler'sche Zahl $e = 2,71828\ldots$ ersetzt, so spricht man von einer natürlichen Exponentialfunktion $y = e^x$.

1.2.1 Exponentielles Wachstum

Viele Wachstumsprozesse (z. B. die Kapitalbildung mit Zinseszinsen, die Zunahme der Bevölkerungszahl oder einer Tierpopulation, das Wachstum eines Waldbestandes, ...) verlaufen so, dass sie durch Exponentialfunktionen beschrieben werden können.

Hierfür ist charakteristisch, dass für die Funktion $f(t)$, die den Bestand nach t (ganzzahligen) Einheiten beschreibt, gilt:

$$f(t+1) = f(t) + f(t) \cdot \frac{p}{100} = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot f(t) = q \cdot f(t)$$

Dabei ist p der prozentuale Zuwachs pro Einheit, q wird als Wachstumsfaktor bezeichnet.

Es kann bewiesen werden dass durch fortgesetzte Anwendung folgende Funktionsgleichung entsteht:

$$f(t) = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t = a \cdot q^t$$

Dabei gibt a den Anfangsbestand (an Kapital, Menschen, Bäumen, ...) an.

Beispiel:
Ein Kapital von 10000 Geldeinheiten (GE) wird zu 6% verzinst. Gesucht sind die Wachstumsfunktion und das Kapital in 8 Jahren.

Wachstumsfunktion:

$$K_t = 10000 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)^t = 10000 \cdot 1,06^t$$

Kapital nach 8 Jahren:

$$K_8 = 10000 \cdot 1,06^8 = 15938,48GE$$

1.2.2 Exponentielle Abnahme

Degressive Abschreibung, radioaktive Zerfälle, Durchlässigkeit von Körpern für elektromagnetische Strahlungen, ... verlaufen in Abhängigkeit der Zeit oft so, dass sie durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden können.

Dabei erfährt ein Anfangsbestand a pro Zeiteinheit die gleiche prozentuale Abnahme p. Der Bestand $f(t)$ nach t Zeiteinheiten ergibt sich dann durch folgende Formel:

$$f(t) = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^t = a \cdot q^t$$

Beispiel:
Eine Maschine mit einem Anschaffungswert von 250000 Geldeinheiten (GE) wird mit 15% degressiv 4 Jahre lang abgeschrieben. Wie lautet die Abschreibungsfunktion? Wie groß ist der Restwert der Maschine?

Abschreibungsfunktion:

$$B_t = 250000 \cdot \left(1 - \frac{15}{100}\right)^t = 250000 \cdot 0,85^t$$

Restwert:

$$B_4 = 250000 \cdot 0,85^4 = 130501,56GE$$

1.3 Der Logarithmus

Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Exponenten lautet:

> Für $a \in \mathbf{R}^+ \backslash \{1\}$ hat nach Vorgabe einer Zahl $r \in \mathbf{R}^+$ die Gleichung $a^x = r$ genau eine Lösung $x \in \mathbf{R}$.

In vielen Fällen kann die Lösung dieser Gleichung sofort angegeben werden:

- $2^x = 8 \quad \Rightarrow \quad 2^x = 2^3 \quad \Rightarrow \quad x = 3$
  In Worten: „Die Zahl $x = 3$ ist derjenige Exponent, mit dem man die Basis 2 potenzieren muss, um 8 zu erhalten.“.

- $3^x = \frac{1}{81} \quad \Rightarrow \quad 3^x = \frac{1}{3^4} \quad \Rightarrow \quad 3^x = 3^{-4} \quad \Rightarrow \quad x = -4$
  In Worten: „Die Zahl $x = -4$ ist derjenige Exponent, mit dem man die Basis 3 potenzieren muss, um $\frac{1}{81}$ zu erhalten“.

- $5^x = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad 5^x = 5^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$
  In Worten: „Die Zahl $x = \frac{1}{2}$ ist derjenige Exponent, mit dem man die Basis 5 potenzieren muss, um $\sqrt{5}$ zu erhalten“.

- $5^x = 7 \quad \ldots ? \ldots$
  In Worten: „Die Zahl x ist derjenige Exponent, mit dem man die Basis 5 potenzieren muss, um 7 zu erhalten“.

Ist in einer Exponentialgleichung der Exponent die freie Variable, so gibt man ihr eine neue Bezeichung: x ist der Logarithmus einer Zahl zu einer bestimmten Basis. In obigem Beispiel: x ist der Logarithmus von 7 zur Basis 5 - oder in Kurzschreibweise: $x = \log_5 7$.

Der Exponent x in der Gleichung $a^x = r$ mit $a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$ und $r \in \mathbf{R}^+$ heißt der Logarithmus von r zur Basis a. In mathematischer Schreibweise:

$$a^x = r \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \log_a r$$

1.4 Besondere Logarithmen

Aus der Gleichung $a^1 = a$ folgt: $\log_a a = 1$
In Worten: „Die Zahl 1 ist derjenige Exponent, mit dem man die Basis a potenzieren muss, um a zu erhalten“.

Für jede zulässige Basis a gilt: $\log_a a = 1$.

Aus der Gleichung: $a^x = a^x$ folgt: $\log_a(a^x) = x$
In Worten: „Die Zahl x ist derjenige Exponent, mit dem man die Basis a potenzieren muss, um a^x zu erhalten.“.
Anders ausgedrückt: Wird eine zulässige Basis a mit x potenziert, und bildet man anschließend von dieser Potenz a^x wieder den Logarithmus zur Basis a, so erhält man wieder die Zahl x.
→ Liegt die Basis einer Potenz in $\mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$, dann sind Potenzieren und Logarithmieren einander entgegengesetzte Rechenoperationen.

In jeder zulässigen Basis a gilt: $\log_a(a^x) = x$.

Die Gleichung $a^x = 1$ mit $a \in \mathbf{R}^+$ hat nach den Gesetzen der Exponentialrechnung immer die Lösung $x = 0$.

Der Logarithmus von 1 ist für jede Basis $a > 0$ immer die Zahl Null: $\log_a 1 = 0$.

Einige Basen - und damit auch die zugehörigen Logarithmen - kommen in den Naturwissenschaften besonders häufig vor. Deshalb haben sich dafür besondere Kurzschreibweisen durchgesetzt:

- Logarithmen zur Basis 10 („Zehner-Logarithmen“):
  statt $\log_{10}$ schreibt man lg
  (Achtung: auf dem Taschenrechner steht meist log!)
- Logarithmus zur Basis 2 („logarithmus dualis“):
  statt $\log_2$ schreibt man *ld*
  (sprich: „ell-dee“)

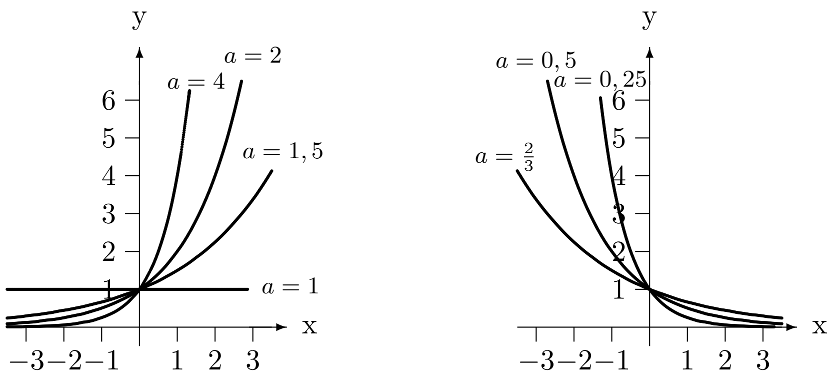
- Logarithmus mit der Euler'schen Zahl $e = 2,71828\ldots$ als Basis („logarithmus naturalis“): statt $\log_{2,718}$ schreibt man ln
(sprich: „ell-enn“)

2 Graphen

2.1 Graph einer Exponentialfunktion

Für alle Exponentialfunktionen mit den Gleichungen $y = a^x$ (wobei $a > 0$) gilt:

- y ist stets positiv $\rightarrow$ die zugehörigen Graphen verlaufen oberhalb der x-Achse
- unabhängig von der Basis a verlaufen alle Graphen für $x = 0$ durch den Punkt $(0|1)$
- Monotonie:
  - für $a > 1$: je größer x, desto größer y $\rightarrow$ der Graph steigt streng monoton
  - für $a = 1$: unabhängig von x beträgt $y = 1$ $\rightarrow$ waagrechter Graph durch $y = 1$
  - für $a < 1$: je größer x, desto kleiner y $\rightarrow$ der Graph fällt streng monoton



- Alle Graphen von Exponentialfunktionen verlaufen im I. und II. Quadranten.
- Sie haben die x-Achse als Asymptote.
- Sie schneiden die y-Achse im Punkt $(0|1)$.
- Für Basen mit $a > 1$ verlaufen die Graphen streng monoton steigend, für Basen mit $0 < a < 1$ verlaufen sie streng monoton fallend.
- Zwei Graphen zu den Basen a und $\frac{1}{a}$ verlaufen spiegelbildlich zur y-Achse zueinander.

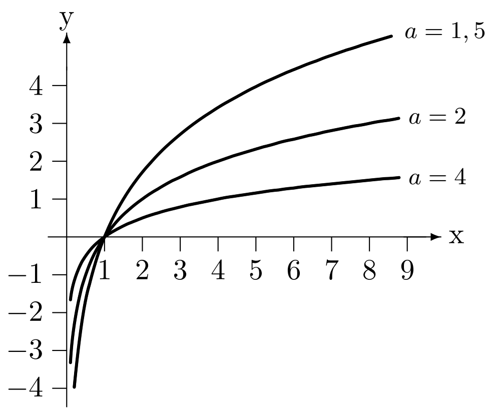
2.2 Graph einer Logarithmusfunktion

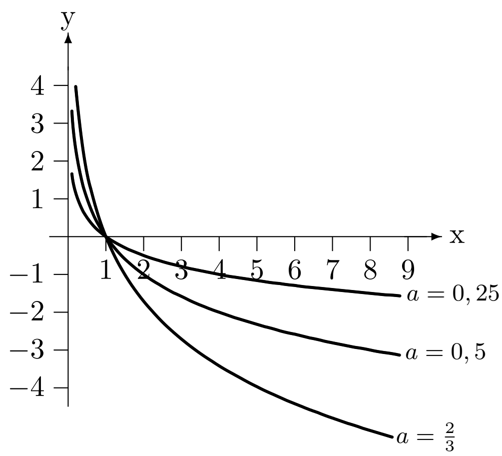
Für alle Logarithmusfunktionen mit $y = \log_a x$ (wobei $a \in \mathbf{R}^+ \backslash \{1\}$) gilt:

- Unabhängig von a verlaufen alle Graphen durch den Punkt $1|0)$, denn es gilt immer: $1 = a^0$.
- Jeder Graph verläuft durch den Punkt $(a|1)$, denn es gilt immer: $a = a^1$.
- Für $a > 1$ gilt:
  - $x > 1$: y muss positiv sein; je größer x, desto größer muss y sein.
  - $0 < x < 1$: y muss negativ sein; je kleiner x, desto negativer muss y sein.

  → Der Graph verläuft streng monoton steigend.
- Für $0 < a < 1$ gilt:
  - $x > 1$: y muss negativ sein; je größer x, desto negativer muss y sein.
  - $0 < x < 1$: y muss positiv sein; je kleiner x, desto größer muss y sein.

  → Der Graph verläuft streng monoton fallend.





Aus den Graphen kann man bereits vermuten, dass die Logarithmuskurven der Basen a und $\frac{1}{a}$ spiegelbildlich zur x-Achse liegen. Dies lässt sich auch recht einfach nachweisen:

Bei einer Spiegelung an der x-Achse gilt, dass eine Kurve bei einem bestimmten x-Wert den Punkt $(x|y)$ hat, während die zweite Kurve den Punkt $(x|-y)$ beinhaltet. Damit muss die Gleichung $y = \log_a x$ zur Spiegelung umgeschrieben werden in $-y = \log_a x$.

Dazu gehört die Exponentialgleichung $x = a^{-y}$, was wiederum vereinfacht werden kann zu $x = \left(\frac{1}{a}\right)^y$.

- Alle Graphen von Logarithmusfunktionen verlaufen im I. und IV. Quadranten.
- Sie haben die y-Achse als Asymptote.
- Sie schneiden die x-Achse im Punkt $P(1|0)$.
- Für Basen mit $a > 1$ verlaufen die Graphen streng monoton steigend, für Basen mit $0 < a < 1$ verlaufen sie streng monoton fallend.
- Zwei Graphen zu den Basen a und $\frac{1}{a}$ verlaufen spiegelbildlich zur x-Achse zueinander.
- Jede Logarithmusfunktion $y = \log_a x$ ist die Umkehrfunktion der zugehörigen Exponentialfunktion $x = a^y$. Deshalb verlaufen die Kurven dieser beiden Funktionen spiegelbildlich zur Winkelhalbierenden durch den I. und III. Quadranten.

3 Rechenregeln

3.1 Exponentialfunktionen

Hierbei sollte es sich eigentlich um ein Wiederholung handeln, deshalb nur in aller Kürze:

- Multiplikation

$$a^x \cdot a^z = a^{x+z}$$
$$a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

- Division

$$\frac{a^x}{a^z} = a^{x-z}$$
$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

- Potenz einer Potenz

$$(a^x)^z = a^{x \cdot z}$$

- Negativer Exponent

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$
$$b^z = \frac{1}{b^{-z}}$$

3.2 Logarithmen

Nach der Vorgabe einer festen Basis $a \in \mathbf{R}^+ \backslash \{1\}$ kann jede beliebige positive Zahl u, v, ... als Potenzwert der Basis a angegeben werden. Mit der Definition des Logarithmus als Exponenten gilt:

$$\begin{array}{rcl} u = a^x & \Leftrightarrow & x = \log_a u \\ v = a^z & \Leftrightarrow & z = \log_a v \end{array}$$

Damit gelten folgende Rechenregeln:

1. **Logarithmus eines Produktes**

$$\begin{array}{rcl} u \cdot v & = & a^x \cdot a^z \\ u \cdot v & = & a^{x+z} \\ x + z & = & \log_a(u \cdot v) \\ \log_a u + \log_a v & = & \log_a(u \cdot v) \end{array}$$

Bezüglich einer festen Basis a ist der Logarithmus eines Produktes gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren (gilt auch für mehr als zwei Faktoren!):

$$\log_a(u \cdot v \cdot w) = \log_a u + \log_a v + \log_a w$$

2. **Logarithmus eines Quotienten**

$$\begin{aligned} \frac{u}{v} &= \frac{a^x}{a^z} \\ \frac{u}{v} &= a^{x-z} \\ x - z &= \log_a \frac{u}{v} \end{aligned}$$

Bezüglich einer festen Basis a ist der Logarithmus eines Quotienten gleich der Differenz aus dem Logarithmus des Zählers und dem Logarithmus des Nenners:

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$$

3. **Logarithmus einer Potenz**

$$\begin{aligned} u^r &= (a^x)^r \\ u^r &= a^{x \cdot r} \\ x \cdot r &= \log_a(u^r) \\ \log_a u \cdot r &= \log_a(u^r) \end{aligned}$$

Bezüglich einer festen Basis a wird der Logarithmus einer Potenz gebildet, indem man den Exponenten mit dem Logarithmus der Basis der Potenz multipliziert:

$$\log_a(u^r) = r \cdot \log_a u$$

4. **Basiswechsel** Aufgabe: Wie lautet der Logarithmus von 5 zur Basis 3 in der neuen Basis 7?
   Aus $y = \log_3 5$ erhält man die Exponentialgleichung $3^y = 5$.

$$\begin{aligned} 3^y &= 5 \\ \log_7(3^y) &= \log_7 5 \\ y \cdot \log_7 3 &= \log_7 5 \\ y &= \frac{\log_7 5}{\log_7 3} \\ \text{Aus Angabe } y = \log_3 5: \qquad \log_3 5 &= \frac{\log_7 5}{\log_7 3} \end{aligned}$$

Um den Logarithmus bezüglich einer beliebigen Basis $a \in \mathbf{R} \backslash \{1\}$ mit dem Taschenrechner zu berechnen muss ein Basiswechsel zur Basis 10 oder zur Euler'schen Zahl vollzogen werden:

$$\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}$$

4 Differenzialrechnung

4.1 Ableitung der Exponentialfunktion

Mit Hilfe der h-Methode und diverser Substitutionen kann gezeigt werden dass die Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion $y = a^x$ den Logarithmus beinhaltet.

Die allgemeine Exponentialfunktion $y = a^x$ mit $a \in \mathbf{R}^+ \backslash \{1\}$ hat die Ableitungsfunktion $y' = a^x \cdot \ln a$.

Betrachtet man nun nicht die allgemeine, sondern die natürliche Exponentialfunktion, so bekommt man mit obiger Regel folgende Ableitung:

Die natürliche Exponentialfunktion $y = e^x$ hat die Ableitungsfunktion

$$y' = e^x \cdot \ln e = e^x$$

.

Die natürliche Exponentialfunktion ist die einzige Funktion, deren Ableitungsfunktion gleich der Funktion selbst ist! Dies gilt auch für alle höheren Ableitungen.

Für die Funktion $y = b \cdot e^{kx}$ erfolgt die Berechnung der Ableitung mit der Kettenregel:

$$y' = b \cdot e^{kx} \cdot k = k \cdot b \cdot e^{kx} = k \cdot y$$

Beispiel:
Bestimmen Sie die max. Definitionsmenge und die erste Ableitung der Funktion $h(x) = 7 \cdot e^{3k+2x}$.

Lösung:
Da der Exponent jeden beliebigen Wert annehmen darf gilt: $\mathbf{D}_{max} = \mathbf{R}$.

$$h'(x) = 7 \cdot e^{3k+2x} \cdot 2 = 14 \cdot e^{3k+2x}$$

4.2 Ableitung der Logarithmusfunktion

Da jeder Logarithmus mit Hilfe eines Basiswechsels durch den natürlichen Logarithmus ausgedrückt werden kann gilt:

$$y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$$

Ist nun die Ableitung y' gesucht, so erkennt man dass $\ln a$ nur im Faktor auftritt. Zur Berechnung der Ableitung von $y = \log_a x$ muss nur die erste Ableitung von $\ln x$ bekannt sein.

Es gilt:

$$y = \ln x \qquad \Leftrightarrow \qquad e^y = x$$

Diese Exponentialfunktion wird sowohl auf der linken, als auch auf der rechten Seite nach x differenziert. Dabei muss auf der linken Seite die Kettenregel angewendet werden, da y ja selbst eine Funktion von x ist!

$$\begin{aligned}
e^x &= y && |\,\text{Beide Seiten nach } x \text{ ableiten} \\
e^y \cdot y' &= 1 \\
y' &= \frac{1}{e^y} && |\, e^y = x \text{ wieder einsetzen} \\
y' &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Die in $\mathbf{R}^+$ erklärte natürliche Logarithmusfunktion $y = \ln x$ hat die Ableitung $y' = \frac{1}{x}$.

Damit kann auch die Ableitung jeder beliebigen Logarithmusfunktion angegeben werden.

Die allgemeine Logarithmusfunktion $y = \log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$ hat die Ableitung

$$y' = \left(\frac{1}{\ln a} \cdot \ln x\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

.

Die verkettete Funktion $y = \ln g(x)$, in der die Funktion g differenzierbar und $g(x) > 0$ erfüllt ist, hat die Ableitung $y' = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$.

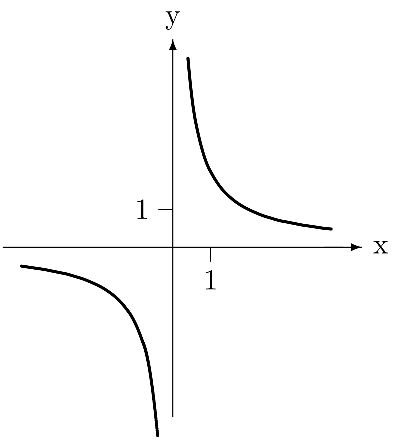
Beispiel:
Wie lauten die ersten Ableitungen der Funktionen $f(x) = \ln x^2$ und $g(x) = (\ln x)^2$?

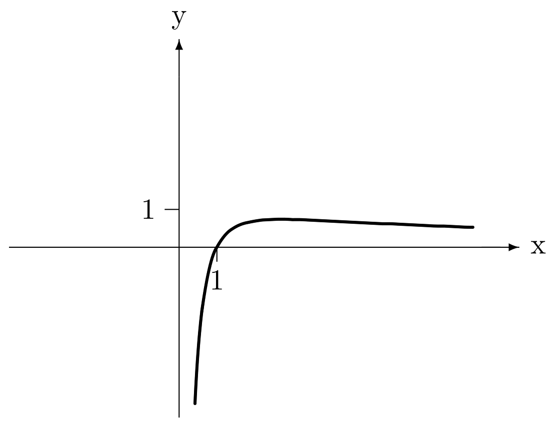
Lösung:
Bei beiden Funktionen muss die Kettenregel angewendet werden. Bei $f(x)$ ist der Logarithmus die äußere Funktion und das Quadrat die innere, bei $g(x)$ genau umgekehrt.

$$f(x) = \ln x^2 \qquad g(x) = (\ln x)^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x \qquad g'(x) = 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \qquad g'(x) = \frac{2}{x} \cdot \ln x$$





Übungsaufgaben

1. Bestimmen Sie das Monotonieverhalten sowie die Lage und Art der Extrempunkte des Graphen von
$$f : y = 2 \cdot \frac{x+1}{e^{2x}}$$

2. Geben Sie die max. Definitionsmenge und das Monotonieverhalten der Funktion $g(x)$ an.
$$g(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

3. Bestimmen Sie Art und Lage der lokalen Extrema von f_a.
$$f_a(x) = \frac{a \cdot x}{e^{x-a}} \qquad \text{mit: } a \neq 0$$

4. Wie lautet die max. Definitionsmenge und die erste Ableitung der Funktion $f(x)$?
$$h(x) = \ln \frac{x^2}{x^2+1}$$

5. Unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven mit den Gleichungen $y = \ln(x+3)$ und $\ln(7-x)$?

6. Bestätigen Sie folgende Zusammenhänge:
   (a) $f(x) = \frac{\ln(2x+1)}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = -0,4319$
   (b) $h(x) = e^{\sin(\pi \cdot x)} \quad \Rightarrow \quad h''(1) = \pi^2$

Lösungen

1. **Bestimmen Sie das Monotonieverhalten sowie die Lage und Art der Extrempunkte des Graphen von**

$$\mathbf{f : y = 2 \cdot \frac{x+1}{e^{2x}}}$$

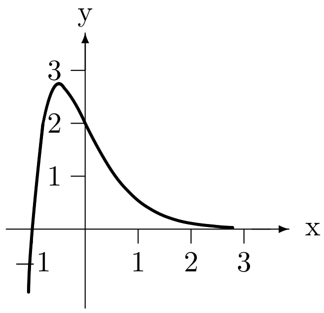
Erste Ableitung mit Quotientenregel:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{e^{2x} \cdot 1 - (x+1) \cdot e^{2x} \cdot 2}{e^{2x} \cdot e^{2x}} = 2 \cdot \frac{e^{2x} \cdot (1 - 2x - 2)}{e^{2x} \cdot e^{2x}} = 2 \cdot \frac{-2x-1}{e^{2x}}$$

Der Zähler e^{2x} ist immer positiv, d. h. das Vorzeichen der ersten Ableitung hängt nur vom Nenner $-2x - 1$ ab.

$$\begin{array}{ccc} f'(x) < 0 & f'(x) = 0 & f'(x) > 0 \\ -2x - 1 < 0 & -2x - 1 = 0 & -2x - 1 > 0 \\ x > -\frac{1}{2} & x = -\frac{1}{2} & x < -\frac{1}{2} \end{array}$$

$\rightarrow$ Hochpunkt $HP\left(-\frac{1}{2}\middle|\, e\right)$



2. **Geben Sie die max. Definitionsmenge und das Monotonieverhalten der Funktion g(x) an.**

$$\mathbf{g(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}}$$

Für den Zähler gibt es keine Beschränkung, aber die Division durch Null muss ausgeschlossen werden.

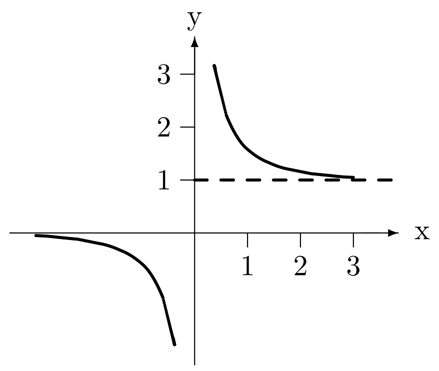
$$e^x - 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad e^x \neq 1 \quad \rightarrow \quad x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}_{g,max} = \mathbf{R}\backslash\{0\}$$

1. Ableitung mit Quotientenregel:

$$g'(x) = \frac{e^x \cdot (e^x - 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(e^x)^2 - e^x - (e^x)^2}{(e^x - 1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$$

Zähler ist immer negativ, der Nenner immer positiv $\rightarrow g'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbf{D}_{f,max}$.

Achtung: Da $\mathbf{D}_{g,max}$ kein Intervall ist (die Null ist ausgenommen!) muss das Monotonieverhalten von g in den Teilintervallen $]-\infty; 0[$ und $]0; +\infty[$ untersucht werden. Da $g'(x) < 0$ in diesen Teilintervallen gilt, ist die Funktion in diesen Teilintervallen jeweils streng monoton abnehmend, jedoch nicht in $\mathbf{D}_{g,max}$.



3. **Bestimmen Sie Art und Lage der lokalen Extrema von $\mathbf{f_a}$.**

$$\mathbf{f_a(x) = \frac{a \cdot x}{e^{x-a}} \qquad \text{mit: } a \neq 0}$$

Erste Ableitung berechnen:

$$f'_a(x) = \frac{a \cdot e^{x-a} - ax \cdot e^{x-a}}{e^{x-a} \cdot e^{x-a}} = \frac{a - ax}{e^{x-a}} = a \cdot \frac{1-x}{e^{x-a}}$$

Der Nenner e^{x-a} ist stets positiv, aber sowohl der Parameter a, als auch der Zähler $1 - x$ können das Vorzeichen wechseln. Fallunterscheidung:

- $a > 0$

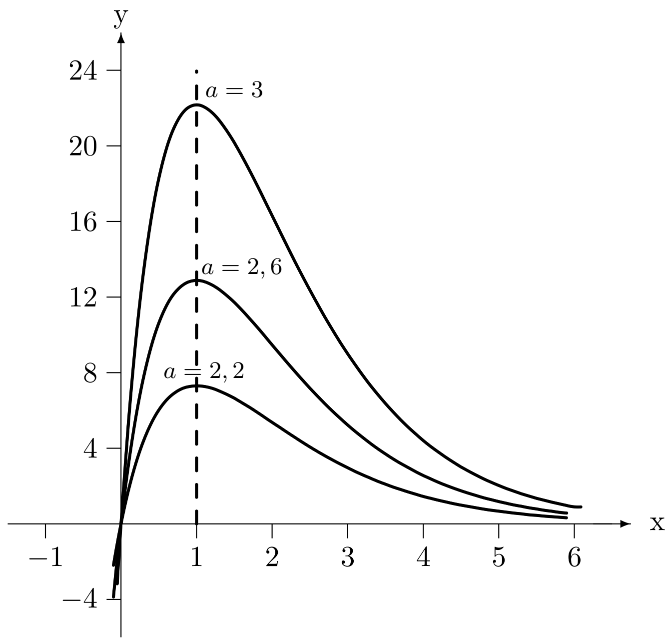
$$\begin{array}{rcc} f'_a(x) < 0 & f'_a(x) = 0 & f'_a(x) > 0 \\ 1 - x < 0 & 1 - x = 0 & 1 - x > 0 \\ x > 1 & x = 1 & x < 1 \end{array}$$

  → Hochpunkt für $a > 0$: $HP\left(1 \,\middle|\, \frac{ae^a}{e}\right)$

- $a < 0$

$$\begin{array}{rcc} f'_a(x) < 0 & f'_a(x) = 0 & f'_a(x) < 0 \\ 1 - x > 0 & 1 - x = 0 & 1 - x < 0 \\ x < 1 & x = 1 & x > 1 \end{array}$$

  → Tiefpunkt für $a < 0$: $TP\left(1 \,\middle|\, \frac{ae^a}{e}\right)$



Die Graphen für $a < 0$ entsprechen den oben abgedruckten, aber an der x-Achse gespiegelten Graphen. Allerdings liegt der Tiefpunkt stets zwischen ca. $-0,14 < y < 0$.

4. **Wie lautet die max. Definitionsmenge und die erste Ableitung der Funktion f(x)?**

$$\mathbf{h(x) = \ln \frac{x^2}{x^2+1}}$$

Das Argument eines Logarithmus größer Null sein. Sowohl der gegebene Zähler (x^2), als auch der Nenner ($x^2 + 1$) sind stets positiv. Aber der Zähler könnte auch Null werden. $\Rightarrow \mathbf{D}_{max} = \mathbf{R}\backslash\{0\}$.

Allgemein gilt:

$$h(x) = \ln g(x) \qquad \rightarrow h'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$$

Die erste Ableitung wird mit Hilfe der Ketten- und der Quotientenregel bestimmt:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \underbrace{\frac{1}{\frac{x^2}{x^2+1}}}_{\frac{1}{g(x)}} \cdot \underbrace{\frac{2x \cdot (x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2}}_{g'(x)} \\ &= \frac{x^2+1}{x^2} \cdot \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2+1}{x^2} \cdot \frac{2x}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{x \cdot (x^2+1)}$$

5. **Unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven mit den Gleichungen $\mathbf{y = \ln(x+3)}$ und $\mathbf{\ln(7-x)}$?**

   Schnittpunkt bestimmen:

$$\begin{aligned} \ln(x+3) &= \ln(7-x) \\ e^{\ln(x+3)} &= e^{\ln(7-x)} \\ x+3 &= 7-x \\ x &= 2 \qquad \text{mit TR: } y \approx 1,61 \quad \Rightarrow S(2|1,61) \end{aligned}$$

   Erste Ableitungen berechnen:

$$y = \ln(x+3) \qquad\qquad y = \ln(7-x)$$

$$y' = \frac{1}{x+3} \cdot 1 \qquad\qquad y' = \frac{1}{7-x} \cdot (-1)$$

$$y' = \frac{1}{x+3} \qquad\qquad y' = \frac{1}{x-7}$$

   Steigungen im Schnittpunkt bestimmen:

$$y'(2) = \frac{1}{2+3} \qquad\qquad y'(2) = \frac{1}{2-7}$$

$$y'(2) = \frac{1}{5} \qquad\qquad y'(2) = -\frac{1}{5}$$

   Steigungswinkel bestimmen:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{5}\right) \qquad\qquad \beta = \arctan\left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$\alpha \approx 11,31^\circ \qquad\qquad \beta \approx -11,31^\circ$$

   Schnittwinkel ermitteln:

$$\varphi = \alpha - \beta = 11,31^\circ - (-11,31^\circ) = 22,62^\circ$$

6. **Bestätigen Sie folgende Zusammenhänge:**

   (a) $\mathbf{f(x) = \frac{\ln(2x+1)}{x}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{f'(1) = -0,4319}$

   Mit der Quotientenregel und der Ableitungsregel für Logarithmen gilt:

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{2x+1} \cdot x - \ln(2x+1) \cdot 1}{x^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\frac{2x}{2x+1} - \ln(2x+1)}{x^2} \\
f'(1) &= \frac{\frac{2\cdot 1}{2\cdot 1+1} - \ln(2\cdot 1+1)}{1^2} \\
&= \frac{\frac{2}{3} - \ln(3)}{1} \\
&\approx \frac{2}{3} - 1,0986 \approx -0,4319
\end{aligned}
$$

(b) $\mathbf{h(x) = e^{\sin(\pi\cdot x)}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{h''(1) = \pi^2}$

Erste Ableitung mit der Ableitungsregel für Exponentialfunktionen und der Kettenregel:

$$f'(x) = e^{\sin(\pi\cdot x)} \cdot \cos(\pi\cdot x)\cdot \pi$$

Zweite Ableitung mit der Ableitungsregel für Exponentialfunktionen und der Produktregel. Dabei wird beachtet, dass π aus der ersten Ableitung nur ein Faktor ist $\rightarrow$ vor die Klammer schreiben:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \pi \cdot \left[\underbrace{e^{\sin(\pi\cdot x)} \cdot \cos(\pi\cdot x)\cdot\pi}_{\text{Ableitung von } e^{\sin(\pi x)}} \cdot \cos(\pi\cdot x) + e^{\sin(\pi\cdot x)} \cdot \underbrace{-\sin(\pi\cdot x)\cdot\pi}_{\text{Ableitung von } \cos(\pi x)} \right] \\
&= \pi^2 \cdot e^{\sin(\pi\cdot x)} \cdot \left[\cos^2(\pi\cdot x) - \sin(\pi\cdot x)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f''(1) &= \pi^2 \cdot e^{\sin(\pi\cdot 1)} \cdot \left[\cos^2(\pi\cdot 1) - \sin(\pi\cdot 1)\right] \\
&= \pi^2 \cdot 1 \cdot [1-0] = \pi^2
\end{aligned}
$$

5 Integralrechnung

5.1 Integration einer Exponentialfunktion

Da die Ableitung einer natürlichen Exponentialfunktion $y = e^x$ wieder $y' = e^x$ ergibt, gilt für das Integral: $\int y'\,dx = y + C \quad \Rightarrow \quad \int e^x\,dx = e^x + C$.

Das Integral über eine natürliche Exponentialfunktion ergibt wieder eine natürliche Exponentialfunktion:

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

Berücksichtigt man hierbei noch die Regeln bezüglich Exponenten und deren Umformung, sowie der linearen Abwandlung

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C \qquad a \neq 0$$

erhält man folgende Integrationsregel:

$$\int a^x\,dx = \int e^{\ln a^x}\,dx = \int e^{x \cdot \ln a}\,dx = \frac{1}{\ln a} \cdot e^{x \cdot \ln a} + C = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C$$

Ist eine Funktion $g(x) = e^{f(x)}$ gegeben, so erhält man deren Ableitung durch Anwendung der Kettenregel:

$$g(x) = e^{f(x)} \qquad \Rightarrow \qquad g'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

Kehrt man die Kettenregel um, so erhält man gleich wieder eine Regel zum Integrieren:

$$\int f'(x) \cdot e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C$$

5.2 Logarithmen und Integrale

5.2.1 Der Logarithmus ausgedrückt als Integral

Zur Wiederholung soll noch einmal die grundlegendste Regel zum Integrieren betrachtet werden:

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C \qquad n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\}$$

Der Exponent des Integranden darf dabei den Wert -1 nicht annehmen, weil sonst in der Stammfunktion eine Division durch Null stattfinden würde.

Doch was würde $n = -1$ überhaupt bedeuten? Das Integral hieße damit: $\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx$. Ferner soll noch einmal daran erinnert werden, wie man das Ergebnis $F(x)$ einer Integration überprüft: Man leitet $F(x)$ und muss dann den Integranden erhalten: $F'(x) = f(x)$.

Spätestens nun muss das Ergebnis von Seite 13 wieder präsent sein, welches für die Ableitung des natürlichen Logarithmus besagt: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Der natürliche Logarithmus kann auch als Integral dargestellt werden:

$$\ln x = \int \frac{1}{x} \, dx$$

Mit der Regel zur lineare Abwandlung

$$\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C \qquad a \neq 0$$

folgt:

$$\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + C$$

$$\Rightarrow \qquad a \cdot \int \frac{1}{ax+b} \, dx = \int \frac{a}{ax+b} \, dx = \ln|ax+b| + C$$

$$\text{allgemein:} \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C \qquad f(x) \neq 0$$

Übungsaufgaben

1. Bestimmen Sie folgende Integrale:
   (a) $\int (2x-1) \cdot e^{x^2-x}\,dx$
   (b) $\int_{-2}^{\sqrt{3}} x \cdot e^{x^2}\,dx$
   (c) $\int e^{-2x}\,dx$
2. Bestimmen Sie folgende Integrale:
   (a) $\int \frac{7}{x}\,dx$
   (b) $\int \frac{2}{4x+1}\,dx$
   (c) $\int \frac{-5}{x^3}\,dx$
3. Zeigen Sie durch Rechnung dass gilt:
$$\int_1^2 \frac{7x^2+4x-9}{x^2}\,dx \approx 5,27$$
4. Gegeben sei das bestimmte Integral
$$\int_6^\beta \frac{2x-8}{x^2-8x+15}\,dx$$
   (a) Für welche β existiert das obige Integral?
   (b) Bestimmen Sie β so, dass gilt:
$$\int_6^\beta \frac{2x-8}{x^2-8x+15}\,dx = \ln\frac{5}{3}$$

5. Gegeben sei für $k \in \mathbf{R}^+$ die Schar von Funktionen

$$f_k : x \mapsto -\frac{x^2}{x+k}$$

(a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge $\mathbf{D}_{k,max}$ von f_k an.

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen von f_k.

(c) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion an den Grenzen des Definitionsbereichs.

(d) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f_k und bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte des Graphen G_k.
(Zwischenergebnis: $f_k'(x) = -\frac{x \cdot (x+2k)}{(x+k)^2}$)

(e) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g, auf der die Extrempunkte aller Graphen g_k liegen.

Im Folgenden sei $\mathbf{k = 1}$.

(f) Ermitteln Sie eine Gleichung der schiefen Asymptote des Graphen G_1 und zeigen Sie, dass diese den Graphen nicht schneidet.

(g) Zeigen Sie, dass

$$F : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + x - \ln(x+1)$$

für $x > -1$ Stammfunktion von f_1 ist.

(h) Der Graph G_1, die y-Achse und die zwei Geraden mit den Gleichungen $y = -x + 1$ sowie $x = u (u > 0)$ schließen ein Flächenstück vom Inhalt $A(u)$ ein.
Bestimmen Sie $A(u)$ und berechnen Sie u so, dass $A(u) = 1$ ist.

Lösungen

1. (a) Direkte Anwendung der Regel $\int f'(x) \cdot e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C$ möglich:

$$\int (2x-1) \cdot e^{x^2-x}\,dx = e^{x^2-x} + C$$

(b) Vor e^{x^2} steht zwar nicht die Ableitung des Exponenten, durch eine kleine Umformung erhält man diese jedoch leicht:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{\sqrt{3}} x \cdot e^{x^2}\,dx &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^{\sqrt{3}} 2 \cdot x \cdot e^{x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[e^{x^2}\right]_{-2}^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (e^3 - e^4) \\ &\approx -17,26 \end{aligned}$$

(c) Kleine Umformung vornehmen um die Regel $\int f'(x) \cdot e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C$ anwenden zu können:

$$\begin{aligned} \int e^{-2x}\,dx &= -\frac{1}{2} \cdot \int -2 \cdot e^{-2x}\,dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} + C \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{7x^2+4x-9}{x^2}\,dx &= \int_1^2 7 + \frac{4}{x} - \frac{9}{x^2}\,dx \\ &= \left[7x + 4 \cdot \ln x + \frac{9}{x}\right]_1^2 \\ &= 14 + 4 \cdot \ln 2 + 4,5 - 7 - 4 \cdot \ln 1 - 9 \\ &= 2,5 + 4 \cdot \ln 2 \\ &\approx 5,27 \end{aligned}$$

3. Bestimmen Sie folgende Integrale:

(a) Direkte Anwendung der Logarithmusregel:

$$\int \frac{7}{x}\,dx = 7 \cdot \int \frac{1}{x}\,dx = 7 \cdot \ln|x| + C$$

(b) Anwendung der linearen Abwandlung der Logarithmusregel:

$$\int \frac{2}{4x+1}\,dx = 2 \cdot \int \frac{1}{4x+1}\,dx = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \ln|4x+1| + C$$

(c) Diese Aufgabe hat nichts mit e-Funktion oder Logarithmus zu tun:

$$\int \frac{-5}{x^3}\,dx = -5\cdot\int\frac{1}{x^3} = -5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{x^2}+C = \frac{5}{2x^2}+C$$

4. (a) Von der unteren Grenze ausgehend kann so weit nach links oder rechts integriert werden, wie der Integrand stetig ist. Da dabei keine Definitionslücke überschritten werden darf gilt:

$$5 < \beta < \infty$$

(b) Der Zähler des Integranden ist die Ableitung vom Nenner, deshalb gilt:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\begin{aligned}
\int_6^\beta \frac{2x-8}{x^2-8x+15}\,dx &= \left[\ln|x^2-8x+15|\right]_6^\beta \\
&= \ln|\beta^2-8\beta+15| - \ln|6^2-8\cdot 6+15| \\
&= \ln|\beta^2-8\beta+15| - \ln 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln\frac{5}{3} &\overset{!}{=} \ln|\beta^2-8\beta+15| - \ln 3 \\
\ln 5 - \ln 3 &\overset{!}{=} \ln|\beta^2-8\beta+15| - \ln 3 \\
\ln 5 &= \ln|\beta^2-8\beta+15| \\
5 &= |\beta^2-8\beta+15|
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
\beta^2-8\beta+15 = 5 & \text{oder} & \beta^2-8\beta+15=-5 \\
\beta^2-8\beta+10 = 0 & & \beta^2-8\beta+20=0 \\
\to\quad \beta_{1/2} = 4\pm\sqrt{6} & & \text{Keine reelle Lösung!} \\
\to\quad \beta_1 \approx 6,45 & & \\
\beta_2 \approx 1,55 & &
\end{array}$$

Da für β in der vorherigen Teilaufgabe bereits der Definitionsbereich $5 < \beta < \infty$ gefunden wurde kommt als Lösung hier nur $\beta_1 = 4+\sqrt{6}$ in Betracht.

5. (a) f_k ist definiert für alle x-Werte, außer für $x = -k$, da dann der Nenner zu Null wird. $\Rightarrow$ $\mathbf{D}_{k,max} = \mathbf{R}\backslash\{-k\}$.

(b)

$$f_k \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 \stackrel{!}{=} 0$$

Doppelte Nullstelle bei $x_{1/2} = 0$, d. h. jeder Graph G_k berührt die x-Achse im Punkt $P(0|0)$.

(c)

$$\lim_{x\to-\infty} f_k = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x^2}{x+k}\right) \to +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_k = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^2}{x+k}\right) \to -\infty$$

$$\lim_{x\to-k-h} f_k = \lim_{x\to-l-h}\left(-\frac{x^2}{x+k}\right) = -\frac{(-k-h)^2}{-h} \to +\infty$$

$$\lim_{x\to-k+h} f_k = \lim_{x\to-l+h}\left(-\frac{x^2}{x+k}\right) = -\frac{(-k+h)^2}{h} \to -\infty$$

$\rightarrow$ Senkrechte Asymptote bei $x = -k$ (Pol mit Vorzeichenwechsel)

(d) Erste Ableitung mit der Quotientenregel bestimmen:

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= -\frac{2x\cdot(x+k) - x^2\cdot 1}{(x+k)^2} \\ &= -\frac{x^2+2kx}{(x+k)^2} \\ &= -\frac{x\cdot(x+2k)}{(x+k)^2} \end{aligned}$$

Der Nenner ist immer positiv, d. h. das Vorzeichen der ersten Ableitung hängt vom Zähler ab. Die erste Ableitung ist größer Null, wenn der Zähler kleiner Null ist (wg. Minuszeichen vor Bruch!) $\rightarrow$ die zwei Faktoren im Zähler müssen unterschiedliche Vorzeichen haben:

$$f_k'(x) > 0$$

$x > 0 \quad \wedge \quad x + 2k < 0$	$x < 0 \quad \wedge \quad x + 2k > 0$
$x > 0 \quad \wedge \quad x < -2$	$x < 0 \quad \wedge \quad x > -2k$
$\mathbf{L}_1 = \{\,\}$	$\mathbf{L}_2 =]-2k;0[$

Unter Berücksichtigung dass $\mathbf{D}_{k,max} = \mathbf{R}\backslash\{-k\}$ gilt: $f_k'(x) > 0$ und damit G_k streng monoton steigend für $x \in]-2k;k[$ und für $x \in]-k;0[$, während für $x \in]-\infty;-2k[$ und $x \in]0;\infty[$ der Graph streng monoton fällt.

Somit ergibt sich ein Tiefpunkt bei $x = -2k$ und ein Hochpunkt bei $x = 0$:

$$TP(-2k|4k) \qquad\qquad HP(0|0)$$

(e) Alle Graphen haben den gemeinsamen Hochpunkt $HP(0|0)$. Dieser liegt auf der y-Achse. Damit ist der y-Abschnitt der gesuchten Geraden gleich Null. Die Gerade muss die folgende Form haben:

$$\begin{aligned} g: y &= m \cdot x \\ &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot x \\ &= \frac{y_{(TP)} - y_{(HP)}}{x_{(TP)} - x_{(HP)}} \cdot x \\ &= \frac{4k - 0}{-2k - 0} \cdot x \\ g: y &= -2x \end{aligned}$$

(f)

$$f_1(x) = -\frac{x^2}{x+1} \qquad \text{mit: } \mathbf{D}_{1,max} = \mathbf{R}\backslash\{-1\}$$

Schiefe Asymptote erhält man durch Polynomdivision:

$$(-x^2) : (x+1) = -x + 1 - \frac{1}{x+1}$$

Gleichung der schiefen Asymptote ist der ganzrationale Anteil der Polynomdivision:

$$h: y = -x + 1$$

Mögliche Schnittpunkte durch gleichsetzen bestimmen:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= h(x) & \\ -\frac{x^2}{x+1} &= -x + 1 & \\ -x^2 &= -x^2 + 1 & \text{Nicht möglich!} \\ 0 &= 1 & \text{Kein Schnittpunkt, da Widerspruch!} \end{aligned}$$

(g) Wenn F_1 Stammfunktion von f_1 sein soll, so muss gelten:

$$F_1' = f_1$$

$$F_1' = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x + 1 - \frac{1}{x+1} \cdot 1 = -x + 1 - \frac{1}{x+1}$$

Dies entspricht f_1 (vgl. Teilaufgabe 5f, Polynomdivision)

(h) Die gesuchte Fläche liegt rechts von der y-Achse (da die y-Achse und $x = u$, mit $u > 0$ als Grenzen angegeben sind). Da jeder Graph G_k, also auch G_1 den Hochpunkt $HP(0|0)$ hat und die Gerade $a(x): y = -x + 1$ die y-Achse bei 1 schneidet weiß man, dass die Gerade oberhalb des Graphen verläuft.

$$\begin{aligned}
A(u) &= \int_0^u [a(x) - f_1(x)]\,dx \\
&= \int_0^u [(-x+1) - (-x+1-\frac{1}{x+1})]\,dx \\
&= -\int_0^u \frac{1}{x+1}\,dx \\
&= [\ln(x+1)]_0^u \\
&= \ln(u+1) - \ln(0+1) \\
&= \ln(u+1) - 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 &\overset{!}{=} \ln(u+1) \\
\Rightarrow \quad e^1 &\overset{!}{=} u+1 \\
e &= u+1 \\
u &= e-1 \qquad (\approx 1,7182)
\end{aligned}$$