Integralrechnung

(BOS 12. Jahrgangsstufe)

Stand: 27. Februar 2005

Kontakt und weitere Infos:
www.barmetler.de

Inhaltsverzeichnis

1 Die Stammfunktion

Für die allgemeine Untersuchung einer Funktion, deren Ableitungsfunktion bekannt ist gilt:

> Eine Funktion $F(x)$ nennt man Stammfunktion der Funktion $f(x)$, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $f \in \mathbf{D}_f$ gilt.

Üblicherweise werden die zu einer Funktion f, g und h gehörenden Stammfunktionen mit den entsprechenden Großbuchstaben F, G und H bezeichnet.

Wie findet man eine Stammfunktion?
Aus der Kurvendiskussion ist bekannt, dass zu $y = x^n$ die Ableitung $y' = n \cdot x^{n-1}$ gehört. Verbindet man diesen Zusammenhang mit obigem Satz, so erkennt man, dass die Funktion $F(x) = x^n$ eine Stammfunktion von $f(x))n \cdot x^{n-1}$ ist.

Dadurch erkennt man bereits wie man - ausgehend von einer gegebenen Funktion $f(x)$ - die zugehörige Stammfunktion finden kann:

- Die Hochzahl n in der gegebenen Funktion $f(x)$ wird um eins auf $n + 1$ erhöht.
- Der neue Term x^{n+1} wird durch die neue Hochzahl $(n + 1)$ dividiert.

> Eine Funktion $g(x) = x^n$ hat die Stammfunktion $G(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} (n \neq -1)$.

Nun soll eine Stammfunktion zu $f(x) = \cos(ax + b)$ bestimmt werden. Aus der Kurvendiskussion ist bekannt, dass

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

D. h. die Stammfunktion könnte $F(x) = \sin(ax + b)$ lauten. Wird diese jedoch abgeleitet, so erhält man

$$F'(x) = \cos(ax + b) \cdot a$$

Man erkennt, dass hier der Faktor a zuviel ist. Deshalb muss die Stammfunktion um den Kehrwert dieses Faktors erweitert werden:

$$F(x) = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax + b) \qquad \rightarrow \qquad F'(x) = f(x) = \cos(ax + b)$$

Allgemein gilt: Ersetzt man in einer Funktion $f(x)$ die freie Variable x durch eine lineare Funktion $ax + b$, so nennt man die Funktion $f(ax + b)$ eine *lineare Abwandlung* von $f(x)$.

> Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, dann ist $\frac{1}{a} \cdot F(ax+b)$ eine Stammfunktion der Funktion $f(ax+b)$

Ist die Funktion $F_1(x)$ in $\mathbf{D}_f$ eine Stammfunktion von $f(x)$, gilt also $F_1'(x) = f(x)$, so ist für jede reelle Zahl C auch die Funktion $F_2(x) = F_1(x) + C$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

Mathematische Begründung:

$$F_2'(x) = [F_1(x) + C]' = F_1'(x) + 0 = F_1'(x) = f(x)$$

Anschauliche Begründung:
Innerhalb eins Intervalls (=zusammenhängende Punktmenge ohne Lücken) $\mathbf{D}_f$ unterscheiden sich die beiden Stammfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ nur durch die additive Konstante C. Dies entspricht einer Verschiebung von $F_1(x)$ parallel zur y-Achse. $f(x)$ entspricht jedoch der ersten Ableitung von $F_1(x)$ und gibt damit die Steigung des Graphen in jedem Punkt an. Diese wird durch das Verschieben jedoch nicht verändert.

> Zu jeder Funktion $f(x)$ kann auf einem Intervall (=zusammenhängende Punktmenge ohne Lücken) $\mathbf{D}_f$ nicht nur eine Stammfunktion $F_1(x)$ sondern jeweils eine ganze Schar von Stammfunktionen $F(x) = F_1(x)+C$ mit $C \in \mathbf{R}$ angegeben werden.

Diese Aussage gilt jedoch ausschließlich in einem Intervall $\mathbf{D}_f$. Hat das Intervall Lücken so ist die obige Aussage nicht zutreffend!

Beispiel:
Gegeben seien zwei mögliche Stammfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ mit $\mathbf{D}_f = \mathbf{R}\backslash\{0\}$:

$$F_1(x) = -\frac{1}{x}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{für } x > 0 \\ -\frac{1}{x} + 5 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Sind beides Stammfunktionen die sich nur über eine additive Konstante unterscheiden, so müssen sich deren y-Werte überall um den gleichen Wert unterscheiden. Hier ist die Differenz der Stammfunktionen in der gegebenen Definitionsmenge keine einheitliche Konstante C.

Fall $x > 0$: $\quad F_2(x) - F_1(x) = -\frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$

Fall $x < 0$: $\quad F_2(x) - F_1(x) = -\frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{x} + 5\right) = -5$

2 Unbestimmtes Integral

Unter dem unbestimmten Integral $\int f(x)dx$ versteht man die Menge aller Stammfunktionen der auf einem Intervall erklärten Funktion $f(x)$.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \text{mit} \quad F'(x) = f(x) \qquad \text{und} \quad C \in \mathbf{R}$$

Die Konstante C heißt Integrationskonstante.

Keinesfalls darf der Ausdruck $\int f(x)dx = F(x)+C$ als Gleichung aufgefasst werden. Sonst würde man über $\int 3x^2dx = x^3+5$ und $\int 3x^2dx = x^3+2$ zu einer falschen Aussage kommen:

$$\begin{aligned} \int 3x^2\,dx &= \int 3x^2\,dx \\ x^3+5 &= x^3+2 \\ 5 &= 2 \end{aligned}$$

Kennt man neben der Schar an Stammfunktionen $F(x) = F_1(x) + C$ zur Funktion $f(x)$ noch die Koordinaten eines Punkts des Graphen von $F(x)$, dann kann eine bestimmte Stammfunktion angegeben werden indem der zugehörige Wert der additiven Konstante C bestimmt wird.

Beispiel:
Gesucht ist die Stammfunktion von $f(x) = 3x^5+2x-3$ deren Graph den Punkt $P(2|19)$ enthält.

$$F(x) = \frac{1}{2}x^6 + x^2 - 3x + C$$

Koordinaten des gegebenen Punktes in $F(x)$ einsetzen:

$$\begin{aligned} 19 &= \frac{1}{2}\cdot 2^6 + 2^2 - 3\cdot 2 + C \\ 19 &= 30 + C \\ C &= -11 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{\underline{F(x) = \frac{1}{2}x^6 + x^2 - 3x - 11}}$$

Übungsaufgaben

Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion zu der gegebenen Funktion.

1. $f(x) = \sin x$
2. $g(x) = \sin(ax + b)$
3. $h(x) = (ax + b)^m \qquad \text{mit } m \neq -1$
4. $f(x) = \sqrt{ax + b} \qquad \text{mit } ax + b > 0$
5. $g(x) = x^7 - 3x^3 + 8x - 2$
6. $h(x) = \sin x + \cos x$
7. $\int (8x^3 - 6x + 2)dx \qquad P(3|150) \in G_F$
8. $\int (2 \cdot \cos x - 5x + 1)dx \qquad P(0|-3) \in G_G$
9. $\int (x^5 - (2x + 5)^2)dx \qquad P(1|1) \in G_H$
10. $f(x) = 3(x - a)(x + a) - a^2 \qquad \text{mit} \quad a \neq 0 \qquad \text{und} \quad F(a) = 2a^3$

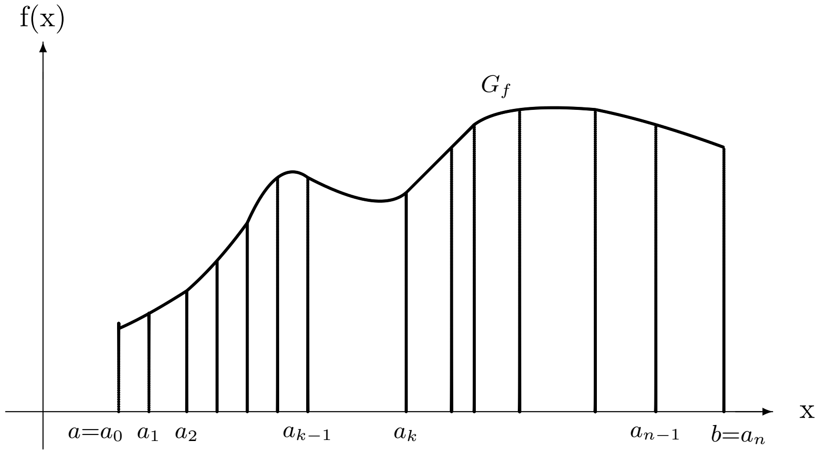
Lösungen

1. $F(x) = -\cos x + C$
2. $G(x) = -\frac{1}{a} \cdot \cos(ax + b) + C$
3. $H(x) = \frac{1}{(m+1)\cdot a} \cdot (ax + b)^{m+1} + C$
4. $F(x) = \frac{2}{3\cdot a} \cdot \sqrt{(ax + b)^3} + C$
5. $G(x) = \frac{1}{8}x^8 - \frac{3}{4}x^4 + 4x^2 - 2x + C$
6. $H(x) = -\cos x + \sin x + C$
7. $F(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2x + 9$
8. $G(x) = 2 \cdot \sin x - \frac{5}{2}x^2 + x - 3$
9. $H(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{6}(2x + 5)^3 + 58$
10. $F(x) = x^3 - 4a^2x + 5a^3$

3 Das bestimmte Integral

3.1 Riemann'sche Summen

Gegeben sei eine Funktion, die im Intervall $I = [a, b]$ stetig sei.



Das Intervall wird durch einfügen von $n-1$ inneren Teilpunkten a_1, a_2, $\ldots$, a_{k-1}, a_k, $\ldots$, a_{n-1} in n Teilintervalle verschiedener Länge untergliedert.

Mit $a = a_0$ und $b = a_n$ gilt damit:

Teilintervall 1 von $[a_0, a_1]$:	Länge $(\Delta x)_1 = a_1 - a_0$
Teilintervall 2 von $[a_1, a_2]$:	Länge $(\Delta x)_2 = a_2 - a_1$
$\vdots$	
Teilintervall k von $[a_{k-1}, a_k]$:	Länge $(\Delta x)_k = a_k - a_{k-1}$
$\vdots$	
Teilintervall n von $[a_{n-1}, a_n]$:	Länge $(\Delta x)_n = a_n - a_{n-1}$

Die Parallelen zur y-Achse bei a_0 und a_n schließen zusammen mit der x-Achse und dem Graphen G_f die Gesamtfläche A ein. Diese wird durch die weiteren Parallelen zur y-Achse durch die Teilpunkte a_1, a_2, $\ldots$, a_{n-1} in einzelne Teilflächen A_k untergliedert. Es gilt:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_{k-1} + A_k + \ldots + A_{n-1} + A_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

Da der gesamte Graph auf dem Intervall $[a; b]$ laut Voraussetzung stetig ist muss dieser auch auf einem Teilintervall $[a_{k-1}; a_k]$ stetig sein. Nach dem Extremwertsatz hat er innerhalb dieses Intervalls damit einen kleinsten und einen größten Funktionswert.

Approximiert man die Teilfläche durch ein Rechteck mit der Breite $(\Delta x)_k = a_k - a_{k-1}$ und einer Höhe die dem kleinsten Funktionswert $m_k = f(x_{min}k)$ entspricht, so bekommt man eine Fläche, die etwas kleiner als die tatsächliche

Teilfläche ist.

$$A_{k_{min}} = m_k \cdot (\Delta x)_k$$

Entsprechend könnte man als Näherung für die Teilfläche auch den Flächeninhalt des Rechtecks mit der Breite $(\Delta x)_k = a_k - a_{k-1}$ und einer Höhe, die dem größten Funktionswert $M_k = f(x_{max}k)$ im Intervall $[a_{k-1}; a_k]$ entspricht, angeben. Als Ergebnis bekäme man eine Fläche, die geringfügig größer als die reale Teilfläche ist.

$$A_{k_{max}} = M_k \cdot (\Delta x)_k$$

Die tatsächliche Größe jeder einzelnen Teilfläche kann also durch folgende Doppelungleichung abgeschätzt werden:

$$A_{k_{min}} \leq A_k \leq A_{k_{max}} \qquad k = (1; 2; \ldots; n)$$

Summiert man die Teilflächen auf, so kann auch die Gesamtfläche approximiert werden:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (\Delta x)_k \;\leq\; A \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot (\Delta x)_k$$

Wird der Flächeninhalt abgeschätzt, so kann also eine Minimalfläche und eine Maximalfläche angegeben werden. Man spricht auch von einer *Untersumme* U_n und einer *Obersumme* O_n. Die tatsächliche Fläche liegt irgendwo dazwischen.

Zerlegt man das Intervall $[a; b]$ in immer feinere Teilintervalle $[a_{k-1}; a_k]$ so liegen auch die darin vorkommenden niedrigsten und höchsten Funktionswerte immer näher zusammen. Da bei der Berechnung der Unter- und der Obersumme der Faktor $(\Delta x)_k$ in beiden identisch ist nähern sich die Unter- und Obersumme immer weiter einander an, d. h. sie haben einen gemeinsamen Grenzwert. Trifft dies zu, so hat auch jede zwischen U_n und O_n eingeschlossene Zwischensumme R_n denselben Grenzwert wie U_n und O_n. Diese Zwischensumme R_n nennt man Riemann'sche Summe .

Im Grenzfall $n \to \infty$ gilt für die Breite der Teilintervalle $(\Delta x)_k \to 0$. Daraus resultiert für die Flächen:

$$\text{Teilflächen: } m_k = M_k \qquad \Rightarrow \qquad \text{Gesamtfläche: } U_n = A = O_n$$

$$\boxed{A = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot (\Delta x)_k = \int_a^b f(x)\, dx}$$

Begriffe:

- Der Grenzwert A wurde durch einen so genannten *Integrationsprozess* (=Aufbauprozess) gebildet.
- Das Ergebnis des Integrationsprozesses heißt *bestimmtes Integral* von $f(x)$ über dem Intervall $[a; b]$ (oder auch: zwischen den Grenzen a und b).

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot (\Delta x)_k = \int_a^b f(x)\,dx$$

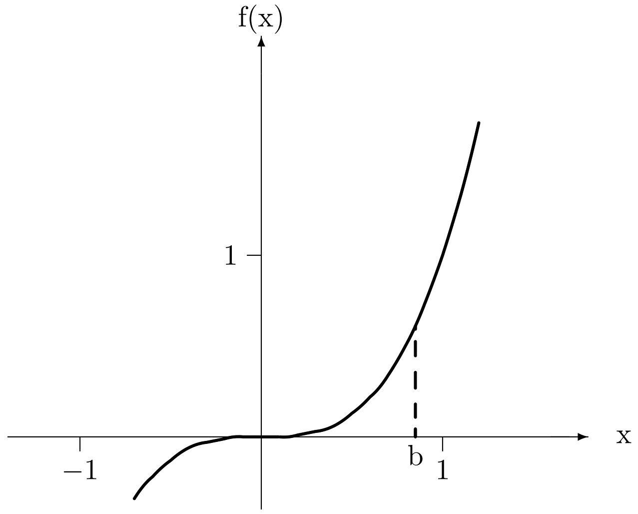
- Das bestimmte Integral ist durch eine Grenzwertdarstellung erklärt. Das Integralzeichen $\int$ ist ein stilisiertes S und erinnert an die ausgeführte Summation.
- Die Zahlen a und b sind die untere (a) bzw. obere (b) *Integrationsgrenzen.* Achtung: es gilt nicht zwangsläufig dass $a < b$!
- Der Funktionsterm $f(x)$ heißt *Integrand* oder auch *Integrandenfunktion.*
- Das Symbol dx ist kein Produkt aus d und x. Es kennzeichnet lediglich die Variable x als Integrationsvariable.. Sie kann beliebig genannt werden, da sie keinen Einfluss auf das Ergebnis des Integrationsprozesses hat:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du \neq \int_a^b g(u)\,du$$

- Die Berechnung des Integrals liefert immer eine reelle Zahl, die je nach Aufgabenstellung als Flächeninhalt, Volumen, Arbeit, . . . gedeutet werden kann.

3.2 Flächenberechnung

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3$. Gesucht ist der Flächeninhalt der Fläche, die durch den Graphen G_f, der x-Achse und der Senkrechten bei $x = b$ gebildet wird.



Vorgehen:

- Zerlegung des Intervalls $[0; b]$ in n Teilintervalle derselben Länge $\Delta x = \frac{b}{n}$.
- Bildung der Riemann'schen Summe: Teilflächen werden approximiert durch Rechteck mit Breite Δx und einer Höhe die dem rechten Intervallrand entspricht (prinzipiell kann auch jeder andere Funktionswert aus dem Intervall genommen werden, aber dieser erleichtert die spätere Rechnung).

$$A = f(a_1) \cdot \Delta x + f(a_2) \cdot \Delta x + \ldots + f(a_n) \cdot \Delta x$$

- Für die inneren Teilpunkte gilt bei gleichmäßiger Aufteilung:

$$a_1 = 1 \cdot \Delta x \qquad a_2 = 2 \cdot \Delta x \qquad a_3 = 3 \cdot \Delta x \qquad \ldots \qquad a_n = n \cdot \Delta x$$

- Mit der gegebenen Funktion $f(x) = x^3$ erhält man damit:

$$\begin{aligned} A &= (1 \cdot \Delta x)^3 \cdot \Delta x + (2 \cdot \Delta x)^3 \cdot \Delta x + (3 \cdot \Delta x)^3 \cdot \Delta x + \ldots + (n \cdot \Delta x)^3 \cdot \Delta x \\ &= 1^3 \cdot (\Delta x)^4 + 2^3 \cdot (\Delta x)^4 + 3^3 \cdot (\Delta x)^4 + \ldots + n^3 \cdot (\Delta x)^4 \\ &= (\Delta x)^4 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) \end{aligned}$$

- Aus vorheriger Überlegung und der Formelsammlung (Stichwort „Folgen → Potenzsummen“) weiß man:

$$\Delta x = \frac{b}{n} \qquad \text{und} \qquad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

  Damit lässt sich die Fläche angeben als:

$$A = \left(\frac{b}{n}\right)^4 \cdot \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} = \frac{b^4 \cdot n^2 \cdot (n^2 + 2n + 1)}{4 \cdot n^4} = \frac{b^4}{4} \cdot \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

- Wird das Intervall $[0; b]$ sehr fein unterteilt, so gilt im Grenzfall $n \to \infty$. Damit strebt der Wert der runden Klammer in vorherigem Ausdruck gegen 1 und man erhält für die Fläche:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{b^4}{4}$$

Oder in der Schreibweise des bestimmten Integrals:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \int_0^b x^3\,dx = \frac{b^4}{4}$$

Übungsaufgaben

Gegeben sei die Funktion $g(x) = x^2$

1. Berechnen Sie die Fläche, die vom Graphen G_g, der x-Achse und den beiden Senkrechten bei $x = 0$ bzw. $x = 3$ begrenzt wird.
2. Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, der vom Graphen G_g, der x-Achse und den beiden Senkrechten bei $x = 2$ bzw. $x = 5$ eingeschlossen ist.

Lösung

1. Vorgehen wie im Beispiel im Abschnitt 3.2 bis zum Ausdruck
$$A = (\Delta x)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$
Nun gilt:
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
Damit erhält man:
$$A = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$
Für den Flächeninhalt ergibt sich aus der Grenzwertbildung $n \to \infty$:
$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} \qquad \mathit{konkret:} \qquad A = \int_0^3 x^2\,dx = \frac{3^3}{3} = 9$$
2. Man kann die Fläche zwischen x-Achse, Graphen, den Senkrechten bei $x = 0$ und $x = 5$ bestimmen und davon den Flächeninhalt der Fläche zwischen x-Achse, Graphen und den Senkrechten bei $x = 0$ und $x = 2$ abziehen:
$$A = \int_2^5 x^2\,dx = \int_0^5 x^2\,dx - \int_0^2 x^2\,dx = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = \frac{117}{3} = 39$$

3.3 Integrationsformel

Wie in Übungsaufgabe 2 auf Seite 12 gezeigt wird die Lösung eines bestimmten Integrals, dessen untere Grenze ungleich Null ist, eigentlich in zwei Schritten bestimmt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx \qquad \text{mit: } a, b \neq 0$$

Da Aufgabenstellungen dieser Art recht häufig vorkommen hat man dafür eine neue Schreibweise eingeführt:

Der Wert des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ ist gleich der Differenz der Funktionswerte $F(b) - F(a)$ einer beliebigen Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$.
Damit erhält man die Integrationsformel:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Dafür wird eine Kurzschreibweise eingeführt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

Beispiele:

1. Zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 deren Schwerpunkte den Abstand r haben, ziehen sich gegenseitig mit der Gravitationskraft $F(r)$ an:

   $$F(r) = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad G = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s} \text{ ist die Gravitationskonstante}$$

   Welche Arbeit ist aufzubringen, wenn der Abstand der Schwerpunkte der Körper von a auf b vergrößert wird?

2. Eine Spule sei einem veränderlichen Magnetfeld ausgesetzt. Die induzierte Spannung U wird gemessen und über der Zeit in ein Koordinatensystem aufgetragen.
   Bestimmen Sie die Änderung des magnetischen Flusses Φ in der Spule.
   Hinweis:

   $$U_{ind} = -N \cdot \dot{\Phi}$$

Lösungen:

1. Die Gravitationskraft $F(r)$ kann in Abhängigkeit vom Abstand r in ein Koordinatensystem eingezeichnet werden. Geht man nun von einem bestimmten Abstand a aus und vergrößert diesen auf b, so wurde der Weg $s = b - a$ zurückgelegt.
   Aus der Physik sollte bekannt sein, dass die Arbeit aus dem Produkt von Kraft und Weg ermittelt wird (da die Richtungen entscheidend sind muss - ganz korrekt - das Skalarprodukt gebildet werden):
   $$W = \vec{F} \circ \vec{s}$$
   Eigentlich wird mit dieser Formel aber genau die Fläche berechnet, die vom Graph der Gravitationskraft, der x-Achse sowie den beiden senkrechten bei a und b gebildet wird. Dies entspricht jedoch genau der Herleitung der Integralrechnung, womit folgt:
   $$\begin{aligned} W &= \int_a^b \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2}\, dr \\ &= G \cdot m_1 \cdot m_2 \int_a^b \left(r^{-2}\right)\, dr \\ &= G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left[-\frac{1}{r}\right]_a^b \\ &= G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left(-\frac{1}{b}\right) - G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) \\ &= G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

2. Der Hinweis bedeutet:
   $$\begin{aligned} U_{ind} &= -N \cdot \dot{\Phi} \\ &= -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} \end{aligned}$$
   Werden beide Seiten integriert, so sieht man, dass sich auf der rechten Seite die Differenziation mit der Integration aufheben. Man schreibt dann nicht mehr $d\Phi$ sondern $\Delta\Phi$.
   $$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} U_{ind}\, dt &= -N \cdot \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\Phi}{dt}\, dt \\ \int_{t_1}^{t_2} U_{ind}\, dt &= -N \cdot \Delta\Phi \\ \rightarrow \quad \Delta\Phi &= -\frac{1}{N} \cdot \int_{t_1}^{t_2} U_{ind}\, dt \\ &= -\frac{1}{N} \cdot U_{ind} \cdot [\,t\,]_{t_1}^{t_2} \\ &= -\frac{1}{N} \cdot U_{ind} \cdot (t_2 - t_1) \end{aligned}$$

3.4 Integralfunktion

Der Wert des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ ist eine reelle Zahl, die außer vom Integranden $f(x)$ noch von der unteren Grenze a und der oberen Grenze b abhängt.

Lässt man im bestimmten Integral der Funktion f über $[a;b]$ die untere Grenze a fest und betrachtet die obere Grenze als veränderlich, dann wird der Wert des Integrals eine Funktion der oberen Grenze.

Bezeichnet man die obere Grenze - also die freie Variable - wie üblich mit x, so kann leicht eine Verwechslung zwischen der Integrationsvariablen und der oberen Grenze auftreten. Deshalb wird für die Integrationsvariable ein neuer Buchstabe, oft t, gewählt.

Ist die Funktion f in einem Intervall I stetig (also integrierbar), so heißt jede in I erklärte Funktion F mit dem Funktionsterm

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \in I$$

eine Integralfunktion der Funktion f.

Beispiel:
Bestimmen Sie zu folgenden Funktionen die zugehörige Integralfunktion:

1. $f(x) = x^2$; Untere Grenze: 1
2. $f(x) = 2x + 3$; Untere Grenze: -4
3. $f(x) = -3x^2 + 2x$; Untere Grenze: 0

Lösung:

1. $\int_1^x t^2\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}1^3 = \frac{1}{3}\cdot(x^3 - 1)$
2. $\int_{-4}^x 2t + 3\,dt = \left[t^2 + 3t\right]_{-4}^x = (x^2 + 3x) - ((-4)^2 + 3\cdot(-4)) = x^2 + 3x - 4$
3. $\int_0^x -3t^2 + 2t\,dt = \left[-t^3 + t^2\right]_0^x = (-x^3 + x^2) - (-0^3 + 0^2) = -x^3 + x^2$

3.4.1 Nullstellen einer Integralfunktion

Aus vorherigen Beispielen kann man erkennen, dass der Wert einer Integralfunktion zu Null wird, wenn die obere gleich der unteren Grenze gesetzt wird.

Dies ist auch gut nachvollziehbar wenn man das Integral als Berechnung der Fläche zwischen einem Graphen G_f, der x-Achse und einer linken und rechten Grenze interpretiert. Fallen die beiden seitlichen Grenzen zusammen, so wird die dazwischen liegende Fläche zu Null.

Jede Integralfunktion hat mindestens eine Nullstelle, die mit der unteren Grenze zusammenfällt.

Neben der Nullstelle die mit der unteren Grenze zusammenfällt kann eine Integralfunktion auch noch weitere Nullstellen haben. Hat eine Funktion $F(x)$ dagegen keine Nullstellen, so kann sie niemals Integralfunktion irgendeiner Funktion $f(x)$ sein!

3.4.2 Maximale Definitionsmenge einer Integralfunktion

Bei der Herleitung der Integralrechnung wurde im Kapitel 3.1 „Riemann'sche Summen“ auf Seite 7 vorausgesetzt, dass die Funktion im betrachteten Intervall stetig sei. Und genau das gilt auch weiterhin!

Die maximale Definitionsmenge einer Integralfunktion ist das Intervall, welches die untere Grenze der Integralfunktion enthält, und in welchem der Integrand eine stetige Funktion ist.

Beispiel:
Warum kann die Funktion $F(x) = \frac{1}{3x^3}$ mit $\mathbf{D}_F = \mathbf{R}^+$ keine Integralfunktion der Funktion $f(x) = -\frac{1}{x^4}$ mit $\mathbf{D}_f = \mathbf{R}^+$ sein?

Lösung:
Die Funktion $F(x)$ ist zwar eine Stammfunktion von $f(x)$, da gilt:

$$F'(x) = \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot x^{-4} = -\frac{1}{x^4} = f(x) \qquad \mathbf{D}_F = \mathbf{D}_f = \mathbf{R}^+$$

Allerdings kann $F(x)$ von gar keiner Funktion f eine Integralfunktion sein, da die Gleichung $F(x) = 0$ keine Lösung hat. Eine Integralfunktion muss aber mindestens eine Nullstelle haben (wenn die obere Grenze mit der unteren Grenze übereinstimmt!).

Übungsaufgaben:
Überlegen Sie warum die gegebenen Funktionen F keine Integralfunktionen der angegebenen Funktionen f sein können.

1. $F(x) = \frac{1}{x^5} + 1$ $\quad \mathbf{D}_F = \mathbf{R}\backslash\{0\}$ $\quad f(x) = \frac{-5}{x^6}$ $\quad \mathbf{D}_f = \mathbf{D}_F$
2. $F(x) = x^2 - 1$ $\quad \mathbf{D}_F = \mathbf{R}$ $\quad f(x) = x$ $\quad \mathbf{D}_f = \mathbf{R}$
3. $F(x) = \frac{1}{x} - 1$ $\quad \mathbf{D}_F = \mathbf{R}^-$ $\quad f(x) = \frac{-1}{x^2}$ $\quad \mathbf{D}_f = \mathbf{R}^-$

Lösungen:

1. Es passt dass $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist:

$$F'(x) = -5x^{-6} = \frac{-5}{x^6} = f(x) \qquad \mathbf{D}_F = \mathbf{D}_f = \mathbf{R}\backslash\{0\}$$

Einzige Nullstellen von $F(x)$:

$$x^{-5} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

Es kann also nur eine einzige Integralfunktion geben:

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt == \int_{-1}^{x} \frac{-5}{t^6}\,dt$$

Wegen der Definitionslücke des Integranden bei $t = 0$ darf die zugehörige Integralfunktion jedoch als maximale Definitionsmenge nur $\mathbf{D}_F = \mathbf{R}^-$ und nicht wie vorgegeben $\mathbf{D}_F = \mathbf{R}\backslash\{0\}$ haben.

2. Die gegebene Funktion $F(x)$ ist nicht einmal Stammfunktion von $f(x)$:

$$F'(x) = 2x \neq f(x)$$

Damit kann $F(x)$ auch keine Integralfunkion von $f(x)$ sein!

3. $F(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$:

$$F'(x) = -1 \cdot x^{-2} = \frac{-1}{x^2} = f(x)$$

Einzige Nullstelle von $F(x)$:

$$x^{-1} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Diese Nullstelle ist aber kein Element der gegebenen Definitionsmenge $\mathbf{D}_F = \mathbf{R}^-$. Damit hat $F(x)$ keine gültige Nullstelle und ist somit auch keine Integralfunktion.

3.5 Rechenregeln für bestimmte Integrale

3.5.1 Konstanter Faktor des Integranden

Ein konstanter Faktor wird vor das Integral gezogen.

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = [k \cdot F(x)]_a^b = k \cdot [F(x)]_a^b = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Beispiele:

1. $\int_a^b 5 \cdot \cos x\,dx = 5 \cdot \int_a^b \cos x\,dx = 5 \cdot [\sin x]_a^b = 5 \cdot (\sin b - \sin a)$
2. $\int_3^5 2x\,dx = 2 \cdot \int_3^5 x\,dx = 2 \cdot [\frac{1}{2}x^2]_3^5 = 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 5^2 - \frac{1}{2} \dot{} 3^2) = 16$ Überprüfen Sie dieses Ergebnis anhand des Graphen (dieser bildet mit x-Achse und $x = 5$ ein Dreieck!)

3.5.2 Integration einer Summe von Funktionen

Das Integral über eine Summe von Funktionen ist gleich der Summe der Integrale über die einzelnen Summanden.

In der Praxis wird das Integral nicht in einzelne Summanden zerlegt, sondern es wird „durchintegriert“.

Da nach den Ableitungsregeln gilt $[F(x) + G(x)]' = f(x) + g(x)$ ist die Summe $F(x) + G(x)$ eine Stammfunktion von $f(x) + g(x)$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) + g(x)\,dx &= [F(x) + G(x)]_a^b = \\ &= (F(b) + G(b)) - (F(a) - G(a)) = \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \\ &= [F(x)]_a^b + [G(x)]_a^b = \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

Beispiele:

1. $\int_a^b 5x^3 - 2x + 10\,dx = \left[\frac{5}{4}x^4 - x^2 + 10x\right]_a^b = \left(\frac{5}{4}b^4 - b^2 + 10b\right) - \left(\frac{5}{4}a^4 - a^2 + 10a\right)$
2. $\int_{-1}^2 x + 1\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + (-1)\right) = 4{,}5$ Überprüfen Sie dieses Ergebnis anhand des Graphen (dieser bildet mit x-Achse und $x = 2$ ein Dreieck!)

3.5.3 Zerlegung des Integrationsintervalls

Ein bestimmtes Integral über die im Intervall I stetige Funktion $f(x)$ darf nach folgender Regel in eine Summe von zwei bestimmten Integralen aufgespalten werden:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \text{mit: } a, b, c \in I$$

Mit Hilfe der Identität $F(c) - F(x) = 0$ folgt:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= [F(x)]_a^b = \\
&= F(b) - F(a) = \\
&= F(b) - F(a) + F(c) - F(c) = \\
&= F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = \\
&= [F(x)]_a^c + [F(x)]_c^b = \\
&= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Beispiel:

$\int_2^6 -2x + 2\,dx = [-x^2 + 2x]_2^6 = (-6^2 + 2 \cdot 6) - (-2^2 + 2 \cdot 2) = -24$
(Negativ, da Fläche unterhalb der x-Achse liegt!)

Mit $c = 4$:

$$\int_2^4 -2x + 2\,dx + \int_4^6 -2x + 2\,dx = [-x^2 + 2x]_2^4 + [-x^2 + 2x]_4^6 =$$
$$= (-4^2 + 2 \cdot 4) - (-2^2 + 2 \cdot 2) + (-6^2 + 2 \cdot 6) - (-4^2 + 2 \cdot 4) = -24$$

Mit $c = 8$:

$$\int_2^8 -2x + 2\,dx + \int_8^6 -2x + 2\,dx = [-x^2 + 2x]_2^8 + [-x^2 + 2x]_8^6 =$$
$$= (-8^2 + 2 \cdot 8) - (-2^2 + 2 \cdot 2) + (-6^2 + 2 \cdot 6) - (-8^2 + 2 \cdot 8) = -24$$

3.5.4 Vertauschen der Integrationsgrenzen

Vertauscht man in einem bestimmten Integral die Integrationsgrenzen, so wechselt das bestimmte Integral das Vorzeichen.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= [F(x)]_a^b = \\
&= F(b) - F(a) = \\
&= -(F(a) - F(b)) = \\
&= -[F(x)]_b^a = \\
&= -\int_b^a f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Beispiele:

1. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos\frac{\pi}{2}) = -(-1) - 0 = 1$

   $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = [-\cos x]_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos\pi) = -1 - 0 = -1$

2. $\int_1^5 \frac{1}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{2\cdot x^2}\right]_1^5 = -\frac{1}{2\cdot 5^2} - (-\frac{1}{2\cdot 1^2}) = -\frac{1}{50} + \frac{1}{2} = 0,48$

   $\int_5^1 \frac{1}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{2\cdot x^2}\right]_5^1 = -\frac{1}{2\cdot 1^2} - (-\frac{1}{2\cdot 5^2}) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{50} = -0,48$

3.5.5 Symmetrie der Integrandenfunktion

Ist $f(x)$ eine gerade Funktion (es gilt also $f(-x) = f(x)$), dann gilt:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad a > 0$$

Beispiele:

1. $\int_{-2}^{2} x^2\,dx = \left[\frac{1}{3} \cdot x^3\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 = \frac{16}{3}$

   $\int_{-2}^{2} x^2\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{2} x^2\,dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot x^3\right]_{0}^{2} = 2 \cdot (\frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3) = 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$

2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \sin\frac{\pi}{4} - (\sin(-\frac{\pi}{4})) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$

   $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx = 2 \cdot [\sin x]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = 2 \cdot (\sin\frac{\pi}{4} - \sin(0)) =$
   $= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - 0\right) = \sqrt{2}$

Ist $f(x)$ ein ungerade Funktion (es gilt also $f(-x) = -f(x)$), dann gilt:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \qquad a > 0$$

Beispiele:

1. $\int_{-2}^{2} 2x^3 - x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(2^4 - 2^2\right) - \frac{1}{2} \cdot \left((-2)^4 - (-2)^2\right) = 0$
2. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_{-\pi}^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(-\pi)) = -1 - (-1) = 0$

Merkblatt zur Integralrechnung

- **Unbestimmtes Integral:**

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \text{wobei:} \qquad F'(x) = f(x)$$

- **Bestimmtes Integral:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \qquad F'(x) = f(x)$$

- **Integralfunktion:**

$$\int_a^x f(t)\,dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a) \qquad F'(t) = f(t)$$

  - Die untere Grenze ist immer fest, die obere variabel.
  - Jede Integralfunktion hat mindestens eine Nullstelle bei $x = a$.
  - $\mathbf{D}_{max}$ ist das Intervall I, auf welchem $f(x)$ stetig ist, und gilt: $a \in I$.

- **Grundlegende Integrationsregel:**

$$\int_a^b x^n\,dx = \left[\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}\right]_a^b = \frac{1}{n+1} \cdot \left(b^{n+1} - a^{n+1}\right) \qquad (n \neq -1)$$

- **Lineare Abwandlung:**

Gilt: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$ dann: $\displaystyle\int_a^b f(ax+b)\,dx = \left[\frac{1}{a} \cdot F(ax+b)\right]_a^b$

- **Konstanter Faktor:**

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

- **Integration einer Summe von Funktionen:**

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

- **Zerlegung des Integrationsintervalls:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \text{mit: } a, b, c \in \mathbf{D}_{max}$$

- **Vertauschen der Integrationsgrenzen:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

- **Symmetrie der Integrandenfunktion:**

Fall 1: $f(-x) = f(x):$ $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)\,dx$

Fall 2: $f(-x) = -f(x):$ $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

Index