Mathematik

FOS 11. Jahrgangsstufe (technisch)

Stand: 23. Juli 2004

Kontakt und weitere Infos:
www.schule.barmetler.de

Inhaltsverzeichnis

1 Wiederholung

1.1 Bruchrechnen

Für natürliche Zahlen m und n ist durch das Symbol $\frac{m}{n}$ ein Bruch mit dem **Zähler** m und dem **Nenner** n festgelegt.

Zwei Brüche sind **gleichnamig**, wenn sie den gleichen Nenner haben.

Addition und Subtraktion

Gleichnamige Brüche:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

Ungleichnamige Brüche:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

- Für alle Brüche einen gemeinsamen Nenner suchen, indem man das *kleinste gemeinsame Vielfache* (kgV) der einzelnen Nenner bildet.
- Alle Brüche auf diesen Hauptnenner erweitern.
- Die Brüche zu einem einzigen Bruch zusammenfassen. Dabei evtl. Klammern setzen!
- Den Zähler des Bruchs bei Bedarf ausmultiplizieren und zusammenfassen.

Multiplikation

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Sonderfall:

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{ac}{b}$$

- Die zwei Zähler werden multipliziert und die zwei Nenner werden miteinander multipliziert.

Division

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Sonderfall:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

- Der erste Bruch wird mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multipliziert.
- Nach dem multiplizieren so weit wie möglich kürzen!

1.2 Wurzelrechnen

Definition:

- $\sqrt{a}$ ist diejenige nicht-negative Zahl, die mit sich selbst multipliziert a ergibt.
$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a \qquad a \in \mathbf{R}^+$$
- $\sqrt{a}$ existiert in den reellen Zahlen nur, wenn $a \geq 0$ gilt.
- $\sqrt{a}$ lässt sich oft nicht als rationale Zahl darstellen. Dann wird meist eine Näherung angegeben.
Für die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ wird beispielsweise die Näherung $1,414$ angegeben.
- Der Term unter dem Wurzelsymbol heißt **Radikand**.

Rechenregeln:

1. $a \cdot \sqrt{x} + b \cdot \sqrt{x} = (a+b) \cdot \sqrt{x}$
2. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
3. $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a:b}$ bzw. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
4. $\sqrt{a^2} = |a|$ z. B. $\sqrt{(-5)^2} = 5$
5. $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$

Definitionsmenge:

- Die Wurzel ist nur für nicht-negative Radikanden definiert. Evtl. muss mit Hilfe der Ungleichungslehre eine Einschränkung des Definitionsbereichs vorgenommen werden.
Beispiel:
$$f(x) = \sqrt{2x+6}$$
Der Radikand $2x+6$ muss positiv sein. Deshalb wird folgende Ungleichung aufgestellt:
$$2x + 6 \geq 0 \qquad \rightarrow \qquad x \geq -3$$
$$\mathbf{D} = \{x \in \mathbf{R} | x \geq -3\}$$

- Bei Termumformungen kann die Definitionsmenge verändert werden!
  Beispiel:
  $$T_1(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \qquad \mathbf{D_1} = \mathbf{R}^+$$
  Beim Term T_1 dürfen nur nicht negative Zahlen eingesetzt werden. Nach der Rechenregel 2 darf dieser Term aber umgeformt werden:
  $$T_1(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \qquad \rightarrow \qquad T_2(x) = \sqrt{x^2}$$
  Beim Term T_2 dürfen nun Werte aus ganz $\mathbf{R}$ eingesetzt werden: $\mathbf{D_2} = \mathbf{R}$!

Tipps:

- Man zerlegt den Radikand so in ein Produkt, dass quadratische Faktoren entstehen, aus denen dann die Wurzel gezogen werden kann.
  Beispiele:
  $$\sqrt{18x^3} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot x \cdot x^2} = 3x \cdot \sqrt{2x} \qquad x \in \mathbf{R}^+$$
  $$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = \sqrt{(a+b)^2} = |a+b|$$
- Soll eine Zahl unter eine Wurzel gezogen werden, so muss sie zunächst quadriert werden.
  Beispiele:
  $$3 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$$
  $$r \cdot 3 = \sqrt{3 \cdot r^2}$$
- Es können nur gleichartige Wurzelterme addiert oder subtrahiert werden! Evtl. muss erst teilweise radiziert werden.
  Beispiel:
  $$\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \quad (= \sqrt{50})$$
- Beim Multiplizieren, Dividieren und Potenzieren gibt es keine Probleme.
  Beispiel:
  $$\frac{\sqrt{8}\sqrt{a}^3}{\sqrt{2a}} = \sqrt{\frac{8a^3}{2a}} = \sqrt{4a^2} = 2a \qquad a \in \mathbf{R}^+$$

1.3 Potenzrechnen

In der Gleichung
a^n =Potenzwert
nennt man a die **Basis** und n den **Exponenten**.

Hat der Exponent den Wert Null, so ist definiert:

$$a^0 = 1$$

Rechenregeln:

- Multiplikation

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

- Division

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

- Potenz einer Potenz

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

- Negativer Exponent

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$
$$b^n = \frac{1}{b^{-n}}$$

1.4 Lösen von Gleichungen

Die Gleichung ist in der geforderten Variablen linear

1. Falls nötig, Klammern ausmultiplizieren.
2. Alle Terme, die die geforderte Variable enthalten nach links, die restlichen Terme nach rechts.
3. Geforderte Variable ggf. ausklammern.
4. Division durch Beifaktor der Variablen (Definitionsmenge beachten!)

Beispiel:
Lösen Sie die Gleichung $a = bx + c(x + 1)$ (mit $b \neq -c$) nach x auf.

- Ausmultiplizieren

$$a = bx + cx + c$$

- ”x nach links”

$$bx + cx = a - c$$

- x ausklammern

$$x(b + c) = a - c$$

- Durch Beifaktor (hier die Klammer) dividieren

$$x = \frac{a - c}{b + c} \qquad b \neq -c$$

Die Gleichung ist in der geforderten Variablen von höherer Potenz

1. Alle Schritte genau so, als ob die geforderte Variable linear vorliegen würde.
2. Anschließend die entsprechende Wurzel ziehen.

Beispiel:
Lösen Sie die Gleichung $A = 2(r^3 + b)$ (mit A, b, $r > 0$, $A > 2b$) nach r auf.

- Ausmultiplizieren
$$A = 2r^3 + 2b$$
- r nach links"
$$2r^3 = A - 2b$$
- Durch Beifaktor dividieren
$$r^3 = \frac{A - 2b}{2}$$
- Wurzel ziehen
$$r = \sqrt[3]{\frac{a - 2b}{2}}$$

Die Variable steht im Nenner eines (oder mehrerer) Bruchterme

1. Falls nichts dagegen spricht (z. B. ein einfacherer Rechenweg) Gleichung mit Hauptnenner multiplizieren.
2. Anschließend die Schritte wie bei den Fällen oben beschrieben.

Beispiel:
Lösen Sie die Gleichung $a = \frac{bx}{cx-d}$ nach x auf.

- Gleichung mit Hauptnenner multiplizieren.
$$a \cdot (cx - d) = \frac{bx}{cx - d} \cdot (cx - d) \qquad \rightarrow \qquad a(cx - d) = bx$$
- Ausmultiplizieren
$$acx - ad = bx$$
- "x nach links"
$$acx - bx = ad$$
- x ausklammern
$$x(ac - b) = ad$$
- Durch Beifaktor dividieren
$$x = \frac{ad}{ac - b}$$

1.5 Übungen

Übungsaufgaben

1. Fassen Sie soweit als möglich zusammen:

a) $6x + 11x + 7x - 2x$ *b)* $8a + 22a - 16a$
c) $14s + 2s + s - 7s$ *d)* $3x^2 - 5x^2 - 19x^2 - x^2$
e) $7a^3 + a^3 - 12a^3 + 9a^3$ *f)* $5xy - 17xy + 12xy$
g) $3(a + b) + 7(a + b)$ *h)* $10(x - y) + 8(x - y) - 13(x - y)$
i) $4(x^2 + 2) - 6(x^2 + 2) + (x^2 + 2)$ *j)* $12(a^2 + b) - 38(a^2 + b) + 3(a^2 + b)$
k) $-3(x - 1) - 4(x - 1) + 2(x - 1)$ *l)* $x(a + b) + y(a + b)$

2. Fassen Sie soweit als möglich zusammen:

a) $3x + 2y + 4x + 12y - 6x + 6y$ *b)* $6a + 13b + 5a - 16b - 11a - 8b$
c) $3a - 6b + 9a - 5b - 6a - 12b$ *d)* $-5a + 6b - 7a - 2b + 12a - 4b$
e) $12u - v + 5w - 13u + 2v - 6w$ *f)* $4(a + b) + 3(x + y) + 5(a + b) - 6(x + y)$

3. Multiplizieren Sie aus:

a) $3x(x - 4)$ *b)* $4(x^2 - 5)$
c) $a^2(4 - a + b)$ *d)* $-2(x - y)$
e) $xy(x + y)$ *f)* $2ab^2(a^2 + b - 5)$

4. Multiplizieren Sie aus und fassen Sie zusammen:

a) $3(2a + 3b) - 5(4a + 6b)$ *b)* $5x(x + 1) - 2(x^2 + 3x)$
c) $7b(a - 2b) - 2b(b - 7a)$ *d)* $4x(2x + 3) - 2(5x^2 + 8x - 6)$
e) $x(y + z) + y(x + z) + z(x + y)$ *f)* $-2x^2y^3(x - y) + 3x^3y^2(x + y)$
g) $2a^2(ab + 2b^2) - ba(3a^2 - ab)$ *h)* $uv(v - 2u) + 2u^2(1 + v) - v^2(u + 3)$

5. Klammern Sie aus:

a) $5x^2 - 10y$ *b)* $2x^4 - 6x^3 + 8x^2$
c) $64x^2y - 72xy^2$ *d)* $56x^3 + 98x^2$
e) $48abc + 72abd$ *f)* $50x^2y^3 - 40x^3y^2$
g) $68a^2b^4 + 85a^2b^3$ *h)* $54 + 27x - 36x^2$

6. Multiplizieren Sie aus:

a) $(a + 4)(b - 2)$ *b)* $(a + 12)(a - 10)$
c) $(3a - 4)(5a + 7)$ *d)* $(2x - 1)(3x - 1)$
e) $(5x - 10y)(5y - 10x)$ *f)* $(rx + st)(rt + sx)$

7. Multiplizieren Sie aus:

a) $(2a + 3b)(a - ab - b)$ *b)* $(4 - x)(x^2 + 2x + 1)$
c) $(y^2 - 3y + 9)(y + 3)$ *d)* $(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x - 4)$
e) $(a + ab - b)(b - ab + a)$ *f)* $(a^2 - b^2)(a + 2b + a^2 - 2b^2)$

8. Multiplizieren Sie aus:

   a) $(x-1)(x+2)+(x+3)(x+4)-(x-5)(x-6)$
   b) $(x^2+3)(x+2)-(2x-7)(x^2+3x)-(x^2+2x-1)(x^2-2x-3)$
   c) $(2a-3b)(a^2-2b)+(a-5b^2)(3a-7b)-(a^2+2a)(b^2-b)$
   d) $(x^3+2x^2+4x+1)(2x-4)-(x^2+3x+12)(-x^2+3x-4)$

9. Multiplizieren Sie aus:

   a) $(3x-7)(2x+1)(4x+2)$ *b)* $(-x^2+2x+1)(3x+2)(1-x)$
   c) $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$ *d)* $(x+3)(x+3)(2x-1)(3x+5)$

10. Wenden Sie die entsprechende binomische Formel an:

   a) $(x+3)^2$ *b)* $(5u+7v)^2$
   c) $(3y+12x)^2$ *d)* $(4a-9b)^2$
   e) $(x^2-4)^2$ *f)* $(10-8z)^2$
   g) $(3a+2b)(3a-2b)$ *h)* $(x^2-3)(x^2+3)$
   i) $(xy-xz)(yx+zx)$

11. Faktorisieren Sie:

   a) x^2+6x+9 *b)* $49x^2+112x+64$
   c) $4a^2-4ab+b^2$ *d)* $16x^2-25$
   e) $144u^2-25v^2$ *f)* $6x^2+60x+150$
   g) $2ab^2+12ab+18a$ *h)* $48a^2c^2-75b^2c^2$
   i) $0,09-0,6v+v^2$ *j)* $\frac{9}{625}r^2+\frac{4}{25}rs+\frac{4}{9}s^2$

12. Welcher Term muss in der Klammer stehen, um eine binomische Formel zu erhalten?

   a) $x^2+4x+[\ldots]$ *b)* $9u^2-[\ldots]+16v^2$
   c) $x^2+[\ldots]+\frac{81}{16}$ *d)* $[\ldots]-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}$

Lösungen

1. *a)* $22x$ *b)* $14a$ *c)* $10s$
   d) $-22x^2$ *e)* $5a^3$ *f)* 0
   g) $10a+10b$ *h)* $5x-5y$ *i)* $-x^2-2$
   j) $-23a^2-23b=-23(a^2+b)$ *k)* $-5x+5$ *l)* $(x+y)(a+b)$

2. *a)* $x+20y$ *b)* $-11b$ *c)* $6a-23b$
   d) 0 *e)* $-u+v-w$ *f)* $9(a+b)-3(x+y)$

3. *a)* $3x^2-12x$ *b)* $4x^2-20$ *c)* $4a^2-a^3+a^2b$
   d) $-2x+2y$ *e)* x^2y+xy^2 *f)* $2a^3b^2+2ab^3-10ab^2$

4. *a)* $-14a-21b$ *b)* $3x^2-x$ *c)* $21ab-16b^2$
   d) $-2x^2-4x+12$ *e)* $2xy+2yz+2xz$ *f)* $x^3y^3+2x^2y^4+3x^4y^2$
   g) $-a^3b+5a^2b^2$ *h)* $2u^2-3v^2$

5. *a)* $5(x^2-2y)$ *b)* $2x^2(x^2-3x+4)$ *c)* $8xy(8x-9y)$
   d) $14x^2(4x+7)$ *e)* $24ab(2c+3d)$ *f)* $10x^2y^2(5y-4x)$
   g) $17a^2b^3(4b+5)$ *h)* $9(6+3x-4x^2)$

6. *a)* $ab-2a+4b-8$ *b)* $a^2+2a-120$ *c)* $15a^2+a-28$
   d) $6x^2-5x+1$ *e)* $125xy-50x^2-50y^2$
   f) $r^2xt+rsx^2+rst^2+s^2tx$

7. *a)* $2a^2-2a^2b+ab-3ab^2-3b^2$ *b)* $-x^3+2x^2+7x+4$
   c) y^3+27 *d)* $x^4-4x^2+16x-16$
   e) $a^2+2ab^2-a^2b^2-b^2$
   f) $a^3+2a^2b+a^4-3a^2b^2-ab^2-2b^3+2b^4$

8. *a)* $x^2+19x-20$
   b) $-x^4-x^3+11x^2+28x+3$
   c) $2a^3-9ab-2a^2b+6b^2+3a^2-17ab^2+35b^3-a^2b^2$
   d) $3x^4+7x^2-38x+44$

9. *a)* $24x^3-32x^2-50x-14$ *b)* $3x^4-7x^3-3x^2+5x+2$
   c) x^4-5x^2+4 *d)* $6x^4+43x^3+91x^2+33x-45$

10. *a)* x^2+6x+9 *b)* $25u^2+70uv+49v^2$ *c)* $9y^2+72xy+144x^2$
    d) $16a^2-72ab+81b^2$ *e)* x^4-8x^2+16 *f)* $100-160z+64z^2$
    g) $9a^2-4b^2$ *h)* x^4-9 *i)* $x^2y^2-x^2z^2$

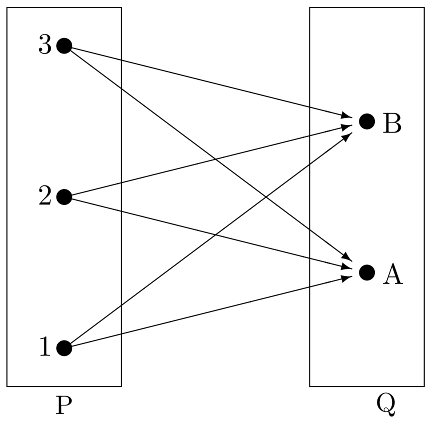
11. *a)* $(x+3)^2$ *b)* $(7x+8)^2$ *c)* $(2a-b)^2$
    d) $(4x+5)(4x-5)$ *e)* $(12u+5v)(12u-5v)$ *f)* $6(x+5)^2$
    g) $2a(b+3)^2$ *h)* $3c^2(4a-5b)(4a+5b)$ *i)* $(0,3-v)^2$
    j) $\left(\frac{3}{25}r+\frac{2}{3}s\right)^2$

12. *a)* 4 *b)* $24uv$ *c)* $\frac{9}{2}$ *d)* $\frac{x^2}{4}$

2 Von der Relation zur Funktion

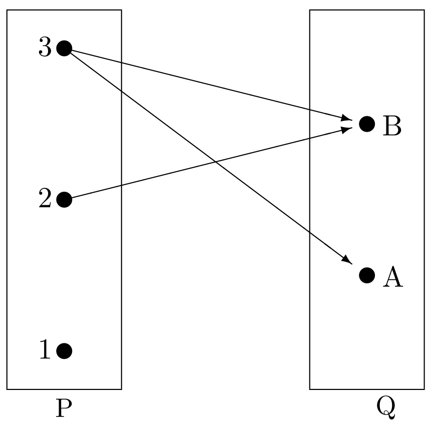
2.1 Relationen

Gegeben seien zwei Zahlenmengen $P = 1, 2, 3, 4$ und $Q = 5, 6, 7$. Setzt man alle Elemente der Menge P in Beziehung zu allen Elementen der Menge Q, nennt man dies eine Paarmenge $P \times Q$.



Paarmenge $P \times Q$

Stehen einzelne Elemente dieser Zahlenmengen in einer bestimmten Beziehung zueinander, so nennt man dies eine Relation.



Relation als Teilmenge der Paarmenge

Gegeben sind zwei Mengen P und Q mit der Paarmenge $P \times Q$. Jede Teilmenge der Paarmenge $P \times Q$ heißt eine Relation (Beziehung) $P \rho Q$ (lies: P rho Q). Die Menge $G \subset P \times Q$ heißt Graph der Relation.

Der Graph einer Relation kann auf verschiedene Weise dargestellt werden:

- als Menge von Paaren: $G = (3 : A), (3; B), (2; B)$
- als Pfeildiagramm (siehe oben)
- als Punkte in einem Koordinatensystem mit der Menge P auf der x-Achse und der Menge Q auf der y-Achse
- als Tabelle

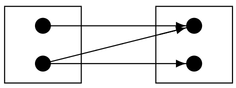
2.2 Funktionen

Für die Schüler gibt es nachfolgend ein Arbeitsblatt, das genau diesen Text enthält.

- Es wird von einer beliebigen Menge an Elementen ausgegangen. Man nennt dies die **Ausgangsmenge**.
- Nun wird definiert mit welchen Elementen der Ausgangsmenge gearbeitet werden soll bzw. darf
  $\rightarrow$ Festlegung der **Definitionsmenge**.
- Anschließend wird eine Zuordnungsvorschrift - auch **Funktion** genannt - erstellt oder vorgegeben.

  Sie legt fest welches Element der Zielmenge zu welchem Element der Definitionsmenge gehört.

  Diese Zuordnung kann auf verschiedene Arten erfolgen:

  - **mathematischer Ausdruck (=Funktion)**: $y = f(x), \quad x \in D$
  - **Pfeildiagramm** 
  - **Tabelle**

1	2	2	3	4
A	A	C	B	C

  - **Graph** 

  Jedem Element der Definitionsmenge darf **nur genau ein** Element aus der Zielmenge zugeordnet werden. Nicht mehr und nicht weniger!

- Ein Element der Wertemenge, das mindestens einem Element der Definitionsmenge zugeordnet wurde nennt man **Funktionswert**.
- Wurde jedem Element der Definitionsmenge ein Element der Zielmenge zugeordnet, erkennt man die **Wertemenge**. Sie ist die Menge aller Funktionswerte.

Arbeitsblatt: Mengen

- Es wird von einer beliebigen Menge an Elementen ausgegangen. Man nennt dies die ______________________ .

- Nun wird definiert mit welchen Elementen der Ausgangsmenge gearbeitet werden soll bzw. darf
  → Festlegung der ______________________ .

- Anschließend wird eine Zuordnungsvorschrift - auch ______________________ genannt - erstellt oder vorgegeben.

  Sie legt fest welches Element der Zielmenge zu welchem Element der Definitionsmenge gehört.

  Diese Zuordnung kann auf verschiedene Arten erfolgen:

  – ______________________________________

  – ______________________________________

  – ______________________________________

  – ______________________________________

  Jedem Element der Definitionsmenge darf ______________________ Element aus der Zielmenge zugeordnet werden. Nicht mehr und nicht weniger!

- Ein Element der Wertemenge, das mindestens einem Element der Definitionsmenge zugeordnet wurde nennt man ______________________.

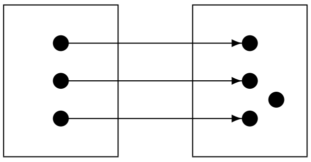
- Wurde jedem Element der Definitionsmenge ein Element der Zielmenge zugeordnet, erkennt man die ______________________. Sie ist die Menge aller Funktionswerte.

2.3 Injektive, surjektive und bijektive Funktionen

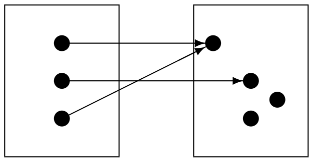
Bei vielen Funktionen ist es üblich, dass zwei verschiedenen Werten der Definitionsmenge der gleiche Funktionswert zugeordnet ist. Deshalb ist es schon etwas besonderes, wenn zwei verschiedenen Elementen x_1, x_2 der Definitionsmenge stets zwei verschiedene Funktionswerte zugeordnet werden.

Deshalb gibt es dafür auch eine besondere Bezeichnung:

Eine Funktion $f : D_f \to Y$ heißt injektiv genau dann, wenn zwei verschiedenen Elementen der Definitionsmenge stets zwei verschiedene Funktionswerte zugeordnet werden.



f ist injektiv

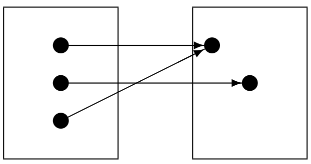


f ist nicht injektiv

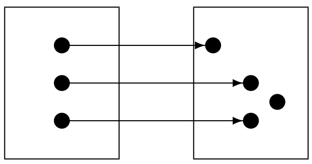
Beispiel:
Die Funktion $f : \mathbf{R} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbf{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ist nicht injektiv (vgl. Graph der Funktion). Schränkt man den Definitionsbereich jedoch auf $\mathbf{R}^+$ ein, so ergibt sich eine neue, injektive Funktion: $f^* : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ mit $f^*(x) = f(x)$.

Es ist ebenfalls erwähnenswert, falls alle Elemente $y \in Y$ als Funktionswerte auftreten. D. h. es gibt für alle $y \in Y$ ein Urbild in der Definitionsmenge.

Eine Funktion $f : D_f \to Y$ heißt surjektiv genau dann, wenn jedes Element $y \in Y$ als Funktionswert von mindestens einem geeigneten x-Wert aus der Definitionsmenge auftritt.



f ist surjektiv



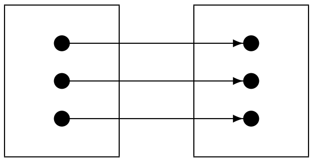
f ist nicht surjektiv

Beispiel:
Die Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $f(x) = \sin(x)$ ist nicht surjektiv, da alle Werte $y < -1$ und $y > 1$ kein Urbild in $\mathbf{D}$ haben. Schränkt man den Zielbereich Y jedoch auf $Y = [-1; 1]$ ein, so ist die Funktion $f^* : \mathbf{R} \to \mathbf{Y}$ mit $f^*(x) = f(x)$ surjektiv.

Ein ganz besonderer Fall tritt ein, fall jedem Element der Definitionsmenge $\mathbf{D}$ ein anderes Element der Zielmenge Y zugeordnet ist, und alle Elemente

$y \in Y$ als Funktionswerte auftreten.

Eine Funktion $f : D_f \to Y$ heißt bijektiv genau dann, wenn sie sowohl injektiv, als auch surjektiv ist.



f ist bijektiv

Beispiel:
Die Funktion $f : x \mapsto 2x - 1$, $\mathbf{D_f} = \mathbf{R}$, $Y = \mathbf{R}$ ist bijektiv.

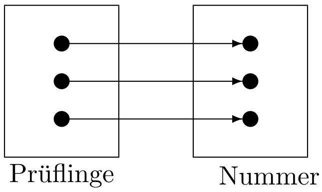
⇒ Anhand von Graphen im Buch besprechen ob eine Funktion injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

2.4 Die Umkehrfunktionen

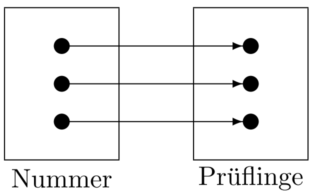
2.4.1 Definition der Umkehrfunktion

Um bei Prüfungen eine neutrale Korrektur zu ermöglichen ist es häufig üblich, dass die Prüflinge auf ihre Arbeit nicht den Namen, sondern eine anonyme Nummer schreiben. Gleichzeitig wird eine Liste erstellt, in welcher die Namen den zugehörigen Nummern zugeordnet werden.

Die Zuordnung Prüfling zu Nummer kann man als Funktion auffassen.



Wie man sieht, darf bei diesem Verfahren jede Nummer nur ein Mal vergeben werden. Sonst wäre eine spätere Zuteilung einer Note zu einem Prüfling nicht mehr möglich. Denn dabei muss die Nummer auf einer Prüfung wieder dem entsprechenden Prüfling zugeteilt werden.



Man erkennt, dass die zweite Zuordnung genau anders herum verläuft wie die erste. Deshalb nennt man sie die Umkehrfunktion zur ersten Zuweisung.

Sie existiert jedoch nur dann, wenn diese umgekehrte Zuordnung eindeutig möglich ist!

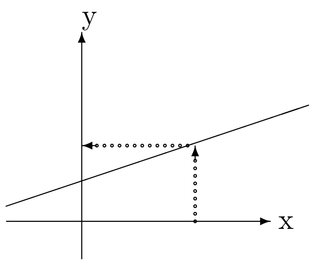
Dies kann auch mathematisch formuliert werden:

Eine Funktion $f : \mathbf{D} \to Y$ ist genau dann umkehrbar, wenn f sowohl injektiv, als auch surjektiv, also bijektiv ist.

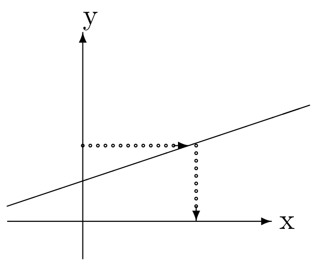
2.4.2 Term der Umkehrfunktion

Bei einer Funktion wird jedem x-Wert aus der Definitionsmenge ein bestimmter y-Wert zugeordnet. Dreht man diese Zuordnung um, so muss jedem y-Wert ein spezieller x-Wert entsprechen.

Graphisch veranschaulicht:

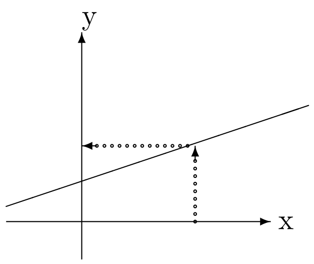


Funktion f

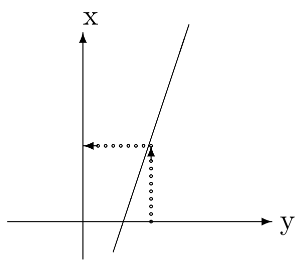


Umkehrfunktion f^{-1}

Da das vertauschte Ablesen bei der Umkehrfunktion für die meisten Personen sehr ungewöhnlich ist, werden einfach die zwei Achsen miteinander vertauscht. Das hat natürlich zur Folge, dass auch der Graph entsprechend umgezeichnet werden muss.



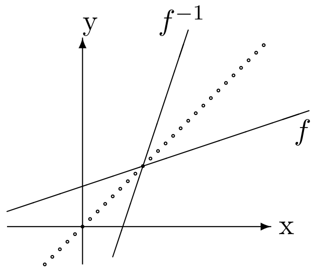
Funktion f



Umkehrfunktion f^{-1}

Dieses vertauschen der Achsen und umzeichnen des Graphen entspricht aber einer einfachen Spiegelung des gesamten Koordinatensystems mit dem Graphen der Funktion f an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten.

Da nun noch die Bezeichnung der Achsen ungewöhnlich ist, werden auch die Bezeichnungen noch vertauscht.



Funktion f mit Umkehrfunktion f^{-1}

Analytisch betrachtet erhält man die Umkehrfunktion durch folgende drei Schritte:

1. Auflösen der Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x.
2. Formales Vertauschen der Variablen x und y.
3. Angabe des Definitionsbereiches von f^{-1}.

Beispiel:

Gegebene Funktion:	$f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$
Funktionsgleichung aufstellen:	$y = \frac{1}{2}x + 1$
Definitionsbereich für f festlegen:	$\mathbf{D}_f = [-2, 2]$
Wertebereich von f ermitteln:	$\mathbf{W}_f = [f(-2); f(2)] = [0; 2]$
Umkehrfunktion ermitteln (1.Schritt):	$y = \frac{1}{2}x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2y - 2$
Umkehrfunktion ermitteln (2.Schritt):	$y = 2x - 2$
Umkehrfunktion ermitteln (3.Schritt):	$\mathbf{D}_{f^{-1}} = W_f = [0; 2]$
Umkehrfunktion angeben:	$f^{-1} : x \mapsto 2x - 2, \quad \mathbf{D}_{f^{-1}} = [0; 2]$

Übungsaufgaben:

1. $f : x \mapsto x^2, \quad \mathbf{D}_f = [0; 2]$
2. $f : x \mapsto 2x - 3, \quad \mathbf{D}_f = \mathbf{R}$
3. $f : a \mapsto \frac{-6+4a}{2}, \quad \mathbf{D}_f = [-3; 3]$
4. $f : x \mapsto \frac{1}{3x^2}, \quad \mathbf{D}_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

Lösungen zu den Übungsaufgaben:

1. $y = \sqrt{x}, \quad \mathbf{D}_{f^{-1}} = [0; 4]$
2. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, \quad \mathbf{D}_{f^{-1}} = \mathbf{R}$
3. $y = \frac{1}{2}a + \frac{3}{2}, \quad \mathbf{D}_{f^{-1}} = [-9; 3]$
4. $y = \sqrt{\frac{1}{3x}}, \quad \mathbf{D}_{f^{-1}} = \mathbf{R}^+ \setminus \{0\}$

2.5 Eigenschaften reeller Funktionen

2.5.1 Gerade Funktionen

Eine reelle Funktion $f : x \mapsto f(x), x \in D_f$ heißt gerade, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D_f$ gilt. Der Graph einer geraden Funktion im Koordinatensystem ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Eine ganzrationale Funktion ist genau dann eine gerade Funktion, wenn im Funktionsterm nur gerade Hochzahlen (einschließlich Null) vorkommen!

Beispiele:

- Für die Funktion $f : x \mapsto 2x^2 + 2$ gilt, dass $f(-x) = 2 \cdot (-x)^2 + 2 = 2x^2 + 2 = f(x)$ ist. Somit ist die Bedingung $f(-x) = f(x)$ erfüllt, und die Funktion ist gerade.
So ist $f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 + 2 = 2 \cdot 2 + 2 = 6 = f(2)$.
- Untersuchung der Funktion $f(x) = |x|, D_f = \mathbf{R}$.
$\Rightarrow f(-x) = |-x| = |(-1) \cdot x| = |(-1)| \cdot |x| = 1 \cdot |x| = |x| = f(x)$

2.5.2 Ungerade Funktionen

Eine reelle Funktion $f : x \mapsto f(x), x \in D_f$ heißt ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D_f$ gilt. Der Graph einer ungeraden Funktion im Koordinatensystem ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Eine ganzrationale Funktion ist genau dann eine ungerade Funktion, wenn im Funktionsterm nur ungerade Hochzahlen vorkommen!

Beispiele:

- Die Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{4}x^3$ ist ungerade, weil für diese Funktion die Beziehung $f(-x) = -f(x)$ gilt.
So ist $f(-3) = \frac{1}{4} \cdot (-3)^3 = \frac{1}{4} \cdot (-27) = -6,75 = -f(3)$.
- Untersuchung der Funktion $y = \sin(x)$.
$\Rightarrow g(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -g(x)$

2.5.3 Monotone Funktionen

Die Funktion $f : D \to \mathbf{R}$ heißt genau dann monoton zunehmend in einem Intervall $I \subset D$, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ und $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) \leq f(x_2)$ folgt.

Hinweis: Gilt in dieser Definition sogar $f(x_1) < f(x_2)$, dann ist die Funktion im Intervall I sogar streng monoton zunehmend!

In der Praxis kann diese Bedingung leicht überprüft werden. Für jede streng monoton zunehmende Funktion muss nämlich gelten:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \quad \text{mit: } x_1, x_2 \in I \quad \wedge \quad x_1 \neq x_2$$

Jede streng monoton zunehmende Funktion ist immer bijektiv (vgl. 2.3).

Beispiele:

- Für die Funktion $f : x \mapsto x^2$ mit $D_f = x|x > 0$, mit $x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2$ gilt:

  $$\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 + x_2) \cdot (x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 > 0$$

  Da laut Definitionsbereich x_1 und x_2 größer Null sein müssen, ist auch die Summe stets größer Null.

- Gegebene Funktion: $y = 2x - 3$

  $$\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(2x_1 - 3) - (2x_2 - 3)}{x_1 - x_2} = \frac{2x_1 - 3 - 2x_2 + 3}{x_1 - x_2} = \frac{2 \cdot (x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = 2 > 0$$

  Am Graph kann man gut erkennen, dass es sich um eine ansteigende Gerade handelt, und die Funktion sicher streng monoton steigend ist.

Die Funktion $f : D \to \mathbf{R}$ heißt genau dann monoton abnehmend in einem Intervall $I \subset D$, wenn aus $x_1, x_2 \in I$ und $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) > f(x_2)$ folgt.

Hinweis: Gilt in dieser Definition sogar $f(x_1) > f(x_2)$, dann ist die Funktion im Intervall I sogar streng monoton abnehmend!

Auch hier gibt es für die Praxis die Möglichkeit die Bedingung für eine streng monoton abnehmende Funktion leicht zu überprüfen. Es muss hierfür stets gelten:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \quad \text{mit: } x_1, x_2 \in I \quad \wedge \quad x_1 \neq x_2$$

Beispiele:

- Für die Funktion $f : x \mapsto x^2$ mit $D_f = \mathbf{R}^-$, mit $x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2$ gilt:

  $$\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 + x_2) \cdot (x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 < 0$$

  Da laut Definitionsbereich x_1 und x_2 kleiner Null sein müssen, ist auch die Summe stets kleiner Null.

- Gegebene Funktion: $y = -3x + 1$

$$\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-3x_1 + 1) - (-3x_2 + 1)}{x_1 - x_2} = \frac{-3x_1 + 1 + 3x_2 - 1}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{3 \cdot (-x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-3 \cdot (x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = -3 < 0$$

Am Graph kann man gut erkennen, dass es sich um eine abnehmende Gerade handelt, und die Funktion sicher streng monoton abnehmend ist.

Jede streng monoton abnehmende Funktion ist immer bijektiv (vgl. 2.3).

2.5.4 Beschränkte Funktionen

Werden die Funktionswerte einer Funktion f nicht größer als ein bestimmter Wert, so nennt man diesen die kleinste obere Schranke (oder auch das **Supremum**) der Funktion. Alle Werte die darüber liegen werden als **obere Schranke** der Funktion bezeichnet.
Auf der anderen Seite kommt es vor, dass die Funktionswerte einer Funktion nie unter einen kleinsten Wert, die größte untere Schranke (oder auch das **Infimum**) absinken. Alle Werte darunter werden dann als **untere Schranke** bezeichnet.

Existiert sowohl eine obere, als auch eine untere Schranke, so nennt an die Funktion beschränkt.

Eine in D definierte reelle Funktion f ist dort beschränkt, wenn es zwei reelle Zahlen s und S gibt, so dass für alle $x \in D$ gilt: $s \leq f(x) \leq S$.

Beispiele:

- Gegeben sei die reelle Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbf{R}$.
  Man kann sich überlegen, dass der Nenner der Funktion für beliebig große x-Werte immer größer wird. Wenn der Nenner aber beliebig groß wird, dann geht der Wert des gesamten Bruchs immer weiter gegen Null. Er wird jedoch nie ganz zu Null, geschweige denn kleiner! Deshalb ist die größte untere Grenze (also das Infimum) $s = 0$.
  Versucht man dagegen den Nenner möglichst klein zu machen, so stellt man fest, dass der x-Wert dafür gegen Null gehen muss - der kleinste Wert wird für $x = 0$ erreicht. Dann ist der Wert des gesamten Bruchs jedoch am größten, nämlich 1. Somit ist das Supremum der Funktion $S = 1$.

- Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist für $x \in \mathbf{R}, x \neq 0$ nicht beschränkt. Betrachtet man jedoch nur das Intervall $I =]0; 1]$, so ist die Funktion nach unten beschränkt (Infimum $s = 0$), nach oben jedoch unbeschränkt.

2.5.5 Übungsaufgaben

1. Untersuchen Sie nachfolgende Funktionen auf Symmetrie.

   (a) $f(x) = 4x^4 + 3x^2 - 1$
   (b) $f(x) = 0,5x^3 - 8x^2$
   (c) $f(a) = 8a^7 - 2a^3 + 4a$
   (d) $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{x^2}$
   (e) $h(x) = 7\sqrt{x}$

2. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Monotonie in der angegebenen Definitionsmenge.

   (a) $y = x^2 - 3 \quad D = \mathbf{R}^-$
   (b) $x \to 5x + 1 \quad D = \mathbf{R}$
   (c) $f(x) = x^3 \quad D = \mathbf{R}$
   (d) $y = (x-1)^2 \quad D = [0;5]$
   (e) $g(x) = -x^2 + 2 \quad D = \mathbf{R}$

3. Sind folgende Funktionen in ihrer Funktionsmenge beschränkt?

   (a) $f(x) : x \to 2x + 3 \quad D = [1;4]$
   (b) $y = \frac{4}{1+|x|} \quad x \in \mathbf{R}$
   (c) $y = -2x^2 + 3 \quad D = [-7;-4]$

Lösungen:

1. (a) gerade → symmetrisch zur y-Achse
   (b) keine Symmetrie
   (c) ungerade → punktsymmetrisch zum Ursprung
   (d) gerade → symmetrisch zur y-Achse
   (e) keine Symmetrie (Radikand muss immer positiv sein - deshalb ist eine Symmetrie gar nicht möglich!)

2. (a) monoton fallend
   (b) monoton steigend
   (c) monoton steigend
   (d) monoton fallend für $x \in [0;1[$ und monoton steigend für $x \in]1;5]$
   (e) keine Monotonie in ganz D. Betrachtet man die Funktion nur abschnittsweise, dann ist $g(x)$ im Bereich $x \leq 0$ monoton steigend, während sie für $x \geq 0$ monoton fällt.

3. (a) Funktionswert kann nicht kleiner als 5 und größer als 11 werden. Deshalb ist $s = 5$ und $S = 11$
   (b) Der $|x|$ kann nicht kleiner als Null werden. D. h. der Bruch kann nie größer als 4 werden. Damit ist das Supremum $S = 4$.
   Da $x \in \mathbf{R}$ kann x beliebig grosse Werte annehmen. Geht der Wert von x schließlich gegen unendlich, so geht der Wert des Bruchs gegen Null. Deshalb ist das Infimum $s = 0$.
   (c) Das Infimum $s = -29$ während das Supremum $S = -25$ ist.

3 Lineare und quadratische Funktionen

3.1 Lineare Funktion

Eine Funktion der Art $f :\mapsto mx + t, \quad x \in \mathbf{D}$ heißt lineare Funktion (m und t sind reelle Zahlen)

Man kann die Funktionsgleichung auf zwei verschiedene Arten angeben:

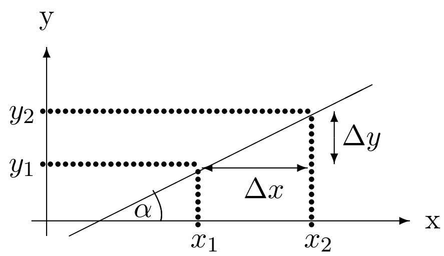
- Explizite Form:

$$y = mx + t \qquad \text{oder} \qquad f(x) = mx + t$$

- Implizite Form:

$$ax + by + c = 0, \qquad \text{wobei: } m = -\frac{a}{b}, \quad t = -\frac{c}{b}, \quad b \neq 0$$

Der Steigungsfaktor m ist definiert als der Tangens des Neigungswinkels α.



Neigungswinkel α einer Geraden

Der Neigungswinkel α ist aus den Katheten im Steigungsdreieck zu berechnen. Dazu muss der Quotient aus den Differenzen der y-Werte und der x-Werte gebildet werden.

$$m = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Im naturwissenschaftlichen Bereich wird eine Differenz üblicherweise durch den griechischen Buchstaben Delta Δ ausgedrückt. Damit erhält man:

$$m = \tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Da hier ein Bruch (Quotient) aus zwei Differenzen gebildet wird, nennt man $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ einen **Differenzenquotient** (siehe auch Seite 96).

3.1.1 Ermittlung des Graphen einer linearen Funktion bzw. der Funktionsgleichung

1. **Gegeben sind zwei Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$**
   Ermittlung des Graphen:

   - P_1 und P_2 im Koordinatensystem eintragen
   - Gerade durch P_1 und P_2 zeichnen

   Ermittlung der Funktionsgleichung:

   $$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1)$$

2. **Gegeben ist die Funktionsgleichung**
   Ermittlung des Graphen:

   - Beliebigen x_1-Wert aus $\mathbf{D}$ auswählen und zugehörigen y_1-Wert berechnen.
   - Beliebigen x_2-Wert aus $\mathbf{D}$ auswählen und zugehörigen y_2-Wert berechnen.
   - Weiter wie unter (1) beschrieben.

3. **Gegeben sei ein Punkt $P(x_1, y_1)$ und die Steigung m**
   Ermittlung des Graphen:

   - Punkt P ins Koordinatensystem eintragen
   - Vom Punkt P trägt man eine Strecke [PA] der Länge 1 nach rechts, parallel zur x-Achse, an.
   - Am Ende der Einheitsstrecke [PA] trägt man im rechten Winkel die Strecke [AB] der Länge $|m|$ an. Dies geschieht für $m > 0$ nach oben, für $m < 0$ nach unten.
   - Nun kann die Gerade durch P und B eingezeichnet werden.

   Ermittlung der Funktionsgleichung:

   $$y = m \cdot (x - x_1) + y_1$$

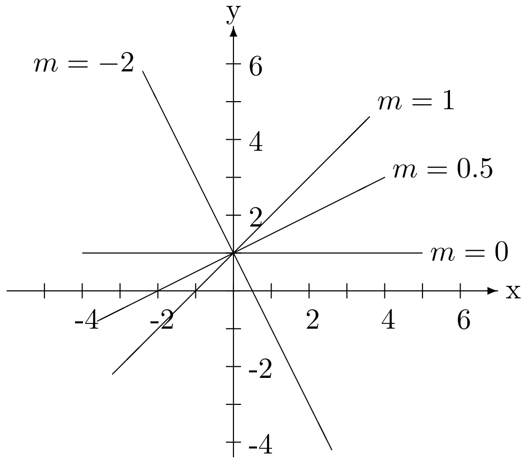
3.1.2 Geradenschar

Wird in der linearen Funktion für die Steigung m kein fester Wert vorgegeben, dann beschreibt der Funktionsterm eine unendliche Anzahl von Geraden.

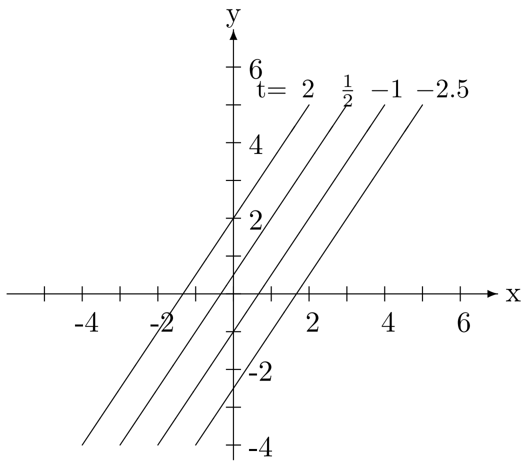
Diese haben alle den gleichen y-Abschnitt, jedoch unterschiedliche Steigungen.

Alle Geraden, die durch einen solchen Funktionsterm beschrieben werden nennt man ein **Geradenbüschel**.

Ist dagegen die Steigung fest vorgegeben, aber der y-Abschnitt variabel, so spricht man von einem **parallelen Geradenbündel**, oder einer **Parallelenschar**.



Geradenbüschel: $y = mx + 1$



Parallelenschar: $y = 1,5x + t$

3.2 Lineare Gleichungen

Gegeben sei eine lineare Funktion $f : x \mapsto 2,5x + 3,5 \quad , x \in \mathbf{R}$. Schreibt man die Funktion in expliziter Form an, so erhält man $y = 2,5x + 3,5$.

Man erkennt leicht, dass es zwei ganz herausragende Punkte gibt:

- $x = 0$
  Schnittpunkt des Graphen G_f mit der y-Achse („y-Abschnitt“).
- $y = 0$
  Schnittpunkt des Graphen G_f mit der x-Achse („Abszisse“ oder „Nullstelle“ der Funktion).

Um die Abszisse einer linearen Funktion zu berechnen muss folgender, allgemeiner Ansatz gewählt werden:

$$ax + b = 0$$

> Eine Gleichung mit der Definitionsmenge $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{G}$ heißt linear (oder ersten Grades), wenn sie sich durch die Form $a \cdot x + b = 0$ mit $a, b \in \mathbf{R}$ darstellen lässt.

Beispiele:

- Gleichung mit Klammern:

$$\begin{aligned} 5 \cdot (2 - x) &= 3 \cdot (5x + 8) \\ 10 - 5x &= 15x + 24 \\ 20x + 14 &= 0 \\ 20x &= -14 \\ x &= -0,7 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{-0,7\}}}$$

- Gleichung mit Parameter:

$$\begin{aligned} a \cdot x + 7 &= 7 \cdot x \\ ax - 7x + 7 &= 0 \\ (a - 7) \cdot x + 7 &= 0 \\ x &= -\frac{7}{a - 7} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad 1.\ \text{Fall: } a \neq 7 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{L} = \left\{-\tfrac{7}{a-7}\right\}}}$$

$$\rightarrow \quad 2.\ \text{Fall: } a = 7 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{\,\} = \emptyset}}$$

- Gleichung mit rationalem Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}\cdot(x-4)+x &= 4\\
\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}+x &= 4\\
\left(\frac{2}{3}+1\right)x-\frac{20}{3} &= 0\\
\frac{5}{3}x &= \frac{20}{3}\\
x &= 4
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L}=\{4\}}}$$

- Textangabe:
Bei einem Rechteck verhalten sich die Längen der Seiten wie 5 : 2. Der Umfang des Rechtecks beträgt 35 cm. Welche Maße hat das Rechteck?

$\rightarrow$ Die Länge der kurzen Seite wird mit a bezeichnet.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{5}{2}a+a\right)\cdot 2 &= 35\\
5a+2a-35 &= 0\\
7a-35 &= 0\\
a &= 5
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Die kurze Seite des Rechtecks ist $a = 5\,cm$,
die lange Seite $b = \frac{5}{2}a = 12,5\,cm$ lang.

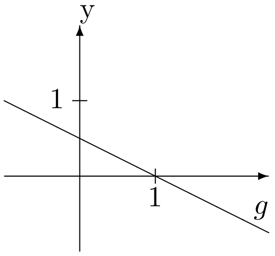
3.3 Lineare Ungleichungen

Die Aussageform $y \geq -0,5x+0,5$ lässt sich in die lineare Funktion $x = -0,5x+0,5$ und die Relation $y > -0,5x+0,5$ zerlegen.

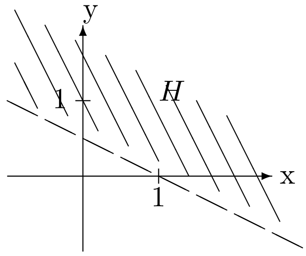
Der Graph der linearen Funktion ist die Gerade g mit dem y-Abschnitt 0,5 und der Abszisse 1.

Der Graph der Relation ist die Halbebene H, die oberhalb der Geraden g

liegt. Alle darin enthaltenen Punkte erfüllen die Bedingung der Relation.



Graph der Funktion



Graph der Relation

Setzt man in der Relation $y = 0$, so wird aus der Relation eine lineare Ungleichung: $0 > -0,5x + 0,5$.

Die Lösungsmenge lässt sich gut anhand des Graphen bestimmen. Für alle x-Werte, die rechts von der Abszisse $x = 1$ der Funktion liegen, ist die Ungleichung $0 > -0,5x + 0,5$ erfüllt. Deshalb lautet die Lösungsmenge $\mathbf{L} = \{x|x > 1\}$.

> Eine Ungleichung mit der Definitionsmenge $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{G}$ heisst linear oder ersten Grades, wenn sie in der Form $ax + b > 0$ oder $ax + b < 0$ mit $a, b \in \mathbf{R}$ und $a \neq 0$ darstellbar ist.

Tips für die Praxis

- Werden Ungleichungen umgestellt, so muss bei einer Multiplikation oder einer Division mit einer negativen Zahl das Ungleichheitszeichen umgedreht werden!
- Werden Ungleichungen mit einem Parameter multipliziert bzw. durch diesen dividiert, so muss eine Fallunterscheidung durchgeführt werden, da der Parameter positiv, oder negativ sein kann.
- Doppelungleichungen werden stets in zwei einzelne Ungleichungen zerlegt. Diese werden getrennt voneinander berechnet, und dann die Lösungsmengen wieder vereinigt.

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} -3x &< 10 \\ x &> -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \left\{x|x > -\frac{10}{3}\right\}}}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} \frac{x}{-2}+8 &> 7 \\ \frac{x}{-2} &> -1 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{x|x<2\}}}$$

Beispiel 3:

$$0,75x - 0,5 < 3x + 1 < -1,25x + 5$$

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{2} &< 3x+1 \\ -\tfrac{9}{4}x &< \tfrac{3}{2} \\ x &> -\tfrac{2}{3} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 3x+1 &< -\tfrac{5}{4}x+5 \\ \tfrac{17}{4}x &< 4 \\ x &< \tfrac{16}{17} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \left\{x| -\frac{2}{3} < x < \frac{16}{17}\right\}}}$$

Beispiel 4:

$$-2x + 3 \leq 0,25x - 0,25 \leq 2x + 1$$

$$\begin{aligned} -2x+3 &\leq 0,25x-0,25 \\ -2,25 &\leq 2,75 \\ x &\geq \tfrac{11}{9} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 0,25x-0,25 &\leq 2x+1 \\ -1,75 &\leq 1,25 \\ x &\geq \tfrac{5}{7} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \left\{x|x \geq \frac{11}{9}\right\}}}$$

Die Bedingung aus der rechten Ungleichung $x \geq \frac{5}{7}$ ist mit der Lösungsmenge automatisch mit abgedeckt, da $\frac{11}{9} > \frac{5}{7}$.

Beispiel 5:

$$3x + 0,5 > 5x - 3 > x + 4,5$$

$$\begin{aligned} 3x+0,5 &> 5x-3 \\ -2x &> -3,5 \\ x &< \tfrac{7}{4} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 5x-3 &> x+4,5 \\ 4x &> 7,5 \\ x &> \tfrac{15}{8} \end{aligned}$$

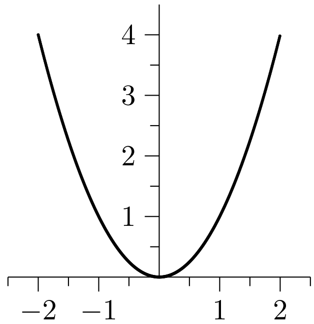
$$\rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{\,\}}}$$

Der Wert von x kann nicht gleichzeitig größer als $\frac{15}{8}$ und kleiner als $\frac{7}{4}$ sein.

3.4 Quadratische Funktion

Normalparabel

Funktionsterm: $y = x^2$

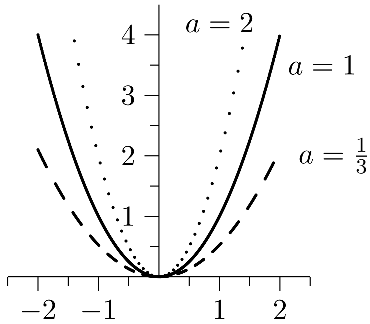


→ Koeffizienten:
$a = 1 \qquad b = 0 \qquad c = 0$

→ Scheitel der Parabel ist Tiefpunkt: $S(0; 0)$

Stauchung und Streckung

Funktionsterm: $y = a \cdot x^2$

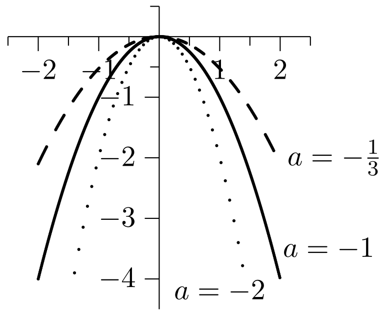


→ Koeffizienten:
$sig(a) = 1 \wedge |a| < 1$ (Stauchung)
$sig(a) = 1 \wedge |a| > 1$ (Streckung)
$b = 0, \quad c = 0$

→ Scheitel der Parabel ist Tiefpunkt: $S(0; 0)$

Stauchung, Streckung und Spiegelung an x-Achse

Funktionsterm: $y = a \cdot x^2$

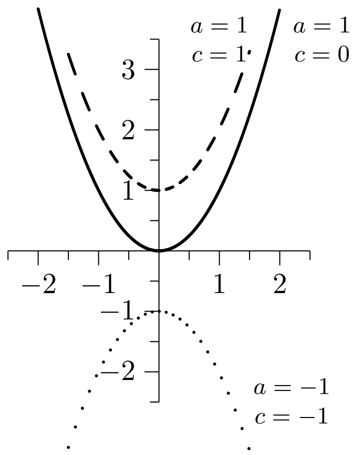


→ Koeffizienten:
$sig(a) = -1 \wedge |a| < 1$ (Stauchung und Spiegelung)
$sig(a) = -1 \wedge |a| > 1$ (Streckung und Spiegelung)
$b = 0, \quad c = 0$

→ Scheitel der Parabel ist Hochpunkt: $S(0; 0)$

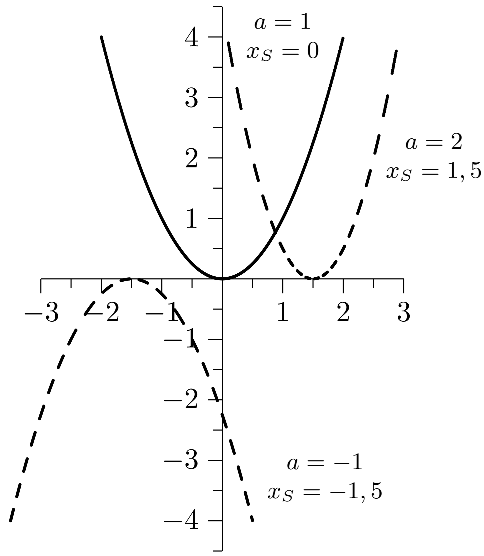
Verschiebung der Parabel längs der y-Achse

Funktionsterm: $y = a \cdot x^2 + c$



→ Koeffizienten:
$b = 0$
$c > 0$ (Verschiebung nach oben)
$c < 0$ (Verschiebung nach unten)

→ Scheitel der Parabel ist für:
- $a > 0$ ein Tiefpunkt: $S(0; c)$
- $a < 0$ ein Hochpunkt: $S(0; c)$



Verschiebung der Parabel längs der x-Achse

Funktionsterm: $y = a \cdot (x - x_S)^2$

→ Koeffizienten:
$x_S > 0$ (Verschiebung nach rechts)
$x_S = 0$ (Achsensymmetrisch zur y-Achse)
$x_S < 0$ (Verschiebung nach links)

→ Scheitel der Parabel ist für:
- $a > 0$ ein Tiefpunkt: $S(x_S; 0)$
- $a < 0$ ein Hochpunkt: $S(x_S; 0)$

Beispiele:

Geben Sie den Funktionsterm einer Parabel mit folgenden Eigenschaften an:

1. Normalparabel nach oben geöffnet, um drei nach rechts verschoben
2. Um den Faktor zwei gestreckte Normalparabel, nach unten geöffnet, $\frac{3}{2}$ nach oben verschoben.
3. Normalparabel um den Faktor 4 gestaucht, zwei nach links und 1 nach oben verschoben.
4. Normalparabel mit Hochpunkt $HP(3; 1)$.

Lösungen zu den Beispielen:

1. $y = (x - 3)^2$
2. $y = -2x^2 + \frac{3}{2}$
3. $y = \frac{1}{4}[x - (-2)]^2 - 1$
4. $y = (-1) \cdot (x - 3)^2 + 1$

3.4.1 Die allgemeine Form

Nimmt man die Lösung des letzten Beispiels und multipliziert dieses aus, so erhält man:

$$\begin{aligned} y &= (-1)\cdot(x-3)^2+1 \\ y &= (-1)\cdot(x^2+6x-9)+1 \\ y &= \underbrace{(-1)}_{a}\cdot x^2+\underbrace{6}_{b}\cdot x+\underbrace{(-8)}_{c} \end{aligned}$$

> Eine Funktion der Form $f: x \mapsto ax^2+bx+c$ heißt quadratische Funktion, wobei $a,b,c \in \mathbf{R} \quad \wedge \quad a \neq 0$

In der allgemeinen Form $ax^2+bx+c=y$ einer quadratischen Funktion heißt ax^2 quadratisches Glied, bx nennt man lineares Glied und c wird als konstantes Glied oder Absolutglied bezeichnet.

3.4.2 Die Scheitelform

Um aus der allgemeinen Form der quadratischen Funktion den Scheitel einer Parabel zu erhalten geht man folgendermaßen vor:

$$\begin{array}{ll} & f(x)=ax^2+bx+c \\ \text{a ausklammern} & f(x)=a\cdot\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] \\ \text{quadrat. ergänzen} & f(x)=a\cdot\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right] \\ \text{binom. Formel} & f(x)=a\cdot\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right] \\ \text{Hauptnenner} & f(x)=a\cdot\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] \\ \text{Klammer auflösen} & f(x)=a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \end{array}$$

Mit $-\frac{b}{2a}=x_S$ und $\frac{4ac-b^2}{4a}=c$ erhält man die bereits bekannte Form der quadratischen Funktion $y=a\cdot(x-x_S)^2+c$. Dies nennt man die Scheitelform der quadratischen Funktion.

> Die Gleichung $f(x)=a\cdot(x-x_S)^2+c$ heißt Scheitelgleichung der quadratischen Funktionen, deren Graphen den Scheitel $S(x_S;c)$ haben.

3.4.3 Parabel durch drei Punkte

Gegeben seien drei Punkte $A(-1;33)$, $B(0;19)$ und $C(1;9)$.

Gesucht ist die Funktion einer Parabel in der allgemeinen und in der Scheitelform, welche diese drei Punkte beinhaltet.

→ Allgemeine Form der Parabelgleichung: $y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{array}{ll} \text{aus Punkt A: (I)} & 33 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \\ \text{aus Punkt B: (II)} & 19 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ \text{aus Punkt C: (III)} & 9 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \end{array}$$

$$\text{aus (III): } c = 19 \qquad \clubsuit$$

$$\begin{array}{rl} \clubsuit \text{ in (I):} & 33 = a - b + 19 \\ & a = 14 + b \qquad \diamondsuit \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \clubsuit \text{ und } \diamondsuit \text{ in (III):} & 9 = (14 + b) + b + 19 \\ & 9 = 33 + 2b \\ & b = -12 \qquad \heartsuit \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \heartsuit \text{ in } \diamondsuit & a = 14 + (-12) \\ & a = 2 \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \text{allgemeine Form:} \quad \underline{\underline{y = 2 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 19}}$$

$$\begin{array}{rcl} y & = & 2 \cdot [x^2 - 6x + 9,5] \\ y & = & 2 \cdot [x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 9,5] \\ y & = & 2 \cdot [(x-3)^2 + 0,5] \\ y & = & 2 \cdot (x-3)^2 + 1 \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \text{Scheitelform:} \quad \underline{\underline{y = 2 \cdot (x-3)^2 + 1}}$$

3.4.4 Tangente an eine Parabel

Gegeben seien die Funktion einer Parabel und ein beliebiger Punkt (dieser kann, muss jedoch nicht Element des Parabelgraphen sein).

Gesucht ist die Gleichung einer Tangente an die Parabel, welche auch durch den gegebenen Punkt verläuft.

Geg: Parabel $y = 2(x-3)^2 + 2$ und Punkt $P(7; 26)$.

→ Allgemeine Form der Geradengleichung:

$$\begin{array}{rr} & y = mx + t \\ & 26 = m \cdot 7 + t \\ \rightarrow & t = 26 - 7m \end{array}$$

$$\rightarrow \text{Geradenbüschel durch Punkt P:} \quad y = mx + (26 - 7m)$$

Der Berührpunkt ist sowohl ein Element der Tangente, als auch der Parabel. Deshalb können die beiden Funktionen gleich gesetzt werden:

$$\begin{aligned}
2x^2 - 12x + 20 &= mx + 26 - 7m \\
2x^2 - 12x - mx - 6 + 7m &= 0 \\
2x^2 - (12 + m)x - 6 + 7m &= 0
\end{aligned}$$

Ein Berührpunkt liegt vor, wenn diese Gleichung nur eine Lösung hat (sonst schneidet die Gerade die Parabel, und es gibt zwei Lösungen, bzw. die Gerade läuft an der Parabel vorbei womit es keine Lösung gibt). Die Diskriminante der Lösungsformel muss also Null sein.

$$\begin{aligned}
D &= b^2 - 4ac \\
0 &= (-12 - m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6 + 7m) \\
0 &= 144 + 24m + m^2 + 48 - 56m \\
0 &= m^2 - 32m + 192 \\
m_{1/2} &= \frac{32 \pm \sqrt{(-32)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 192}}{2 \cdot 1} \\
m_{1/2} &= \frac{32 \pm 16}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_1 &= 24 \\
\rightarrow g_1(x) &= 24x + (26 - 7 \cdot 24) \\
g_1(x) &= 24x - 142
\end{aligned}
\qquad \text{Tangenten} \qquad
\begin{aligned}
m_2 &= 8 \\
\rightarrow g_2(x) &= 8x + (26 - 7 \cdot 8) \\
g_2(x) &= 8x - 30
\end{aligned}$$

$$BP_1(9; 74) \qquad \text{Berührpunkte} \qquad BP_2(5; 10)$$

3.4.5 Umkehrfunktion quadratischer Funktionen

Quadratische Funktionen sind in **D** nicht umkehrbar. Wenn allerdings der Definitionsbereich der quadratischen Funktion so eingeschränkt wird, dass die Zuordnungsvorschrift injektiv (siehe Kapitel 2.3 Seite 17) wird, dann ist die Umkehrung möglich!

Vorgehensweise:

- **Schritt 1:** Quadratische Funktion nach x umstellen.
  → Man erhält eine quadratische Gleichung für x.

  $$ax^2 + bx + c = y \qquad \leftrightarrow \qquad ax^2 + bx + c - y = 0$$

- **Schritt 2:** Ansetzen der Lösungsformel.

  $$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a \cdot (c - y)}}{2a}$$

- **Schritt 3:** Entscheiden, ob in der Lösungsformel das Plus-, oder das Minuszeichen gültig ist. Dies hängt vom Definitionsbereich $\mathbf{D}_f$ für x ab.
- **Schritt 4:** Variable vertauschen und neuen Definitionsbereich $\mathbf{D}_{f^{-1}}$ angeben.

$$f^{-1}(x) : y = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a \cdot (c - x)}}{2a} \qquad \mathbf{D_{f^{-1}} = W_f}$$

oder

$$f^{-1}(x) : y = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a \cdot (c - x)}}{2a} \qquad \mathbf{D_{f^{-1}} = W_f}$$

Beispiele:

- $y = x^2 + 4x - 3 \qquad \mathbf{D} = \mathbf{R}_0^+$

Schritt 1:	$x^2 + 4x - (3 + y) = 0$
Schritt 2:	$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 1 \cdot (3+y)}}{2 \cdot 1} = -2 \pm \sqrt{7 + y}$
Schritt 3:	Da x nur Werte aus $\mathbf{R}_0^+$ annehmen darf, muss das Pluszeichen gelten.
Schritt 4:	$y = -2 + \sqrt{7 + x} \qquad \mathbf{D_{f^{-1}} = W_f} = [\mathbf{-3}; +\infty[$

- $y = -2(x + 3)^2 + 1 \qquad \mathbf{D} = [-2; +\infty[$

Schritt 1:	$-2x^2 - 12x - 17 - y = 0$
Schritt 2:	$x_{1/2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-17 - y)}}{2 \cdot (-2)} = -3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2 - 2y}$
Schritt 3:	Da x größtenteils nur positive Werte annehmen darf, muss das Pluszeichen gelten.
Schritt 4:	$y = -3 + \frac{1}{2}\sqrt{2 - 2x} \qquad \mathbf{D_{f^{-1}} = W_f} =]-\infty; \mathbf{-1}]$

- $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 4 \qquad \mathbf{D} =]-\infty; -2]$

Schritt 1:	$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 6 - y = 0$
Schritt 2:	$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-6 - y)}}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = 2 \pm \sqrt{-8 - 2y}$
Schritt 3:	Da x nur negative Werte annehmen darf, muss das Minuszeichen gelten.
Schritt 4:	$y = 2 - \sqrt{-8 - 2x} \qquad \mathbf{D_{f^{-1}} = W_f} =]-\infty; \mathbf{-12}]$

Übungsaufgaben

1. Beschreiben Sie in Worten wie der Graph folgender Funktionen aussieht.
   (a) $y = -5(x+3)^2 + 2$
   (b) $y = \frac{9}{7} \cdot x^2 - 4$
   (c) $0,5x^2 - y + 3 = 0$
   (d) $x - \frac{4}{x} = \frac{y}{x}$

2. Bestimmen Sie das absolute Maximum und das absolute Minimum bei folgenden Funktionen
   (a) $y = 4x^2 + 2x - 6 \qquad x \in [-1; 5]$
   (b) $y = -\frac{1}{9}x^2 - 27x + 1 \qquad x \in [0; 3]$

3. Eine Parabel verläuft durch die Punkte $A(0|1)$, $B(3|\frac{5}{2})$ und $C(4|5)$.
   (a) Geben Sie die Funktionsgleichung der Parabel an.
   (b) In welchem Bereich der x-Achse sind die Funktionswerte größer $\frac{3}{2}$?
   (c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels der Parabel.
   (d) Zeichnen Sie den Graphen der Parabel und kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse.

4. Formen Sie die Gleichung $y = 2 \cdot (x-3)^2 + 2$ in die allgemeine quadratische Form um.

5. Geben Sie die Koordinaten des Scheitels der Funktion $f(x) = 7x^2 - 14x - 7$ an.

6. Für welche x-Werte sind die Funktionswerte der Parabel $y = 2x^2 + 2$ kleiner als 3?

7. Eine Parabel verläuft durch die Punkte $A(-2|-11)$, $B(1|-2)$ und $C(2|-15)$. Geben Sie die Gleichung der Parabel in der allgemeinen quadratischen Form und in der Scheitelform an.

Lösungen

1. (a) - Nach unten geöffnet (Faktor vor der Klammer ist negativ)
   - Gestreckt (Betrag des Faktors vor der Klammer ist größer als 1)
   - Scheitel liegt bei $S(-3|2)$

   (b) - Nach oben geöffnet (Faktor vor dem x^2 ist positiv)
   - Gestreckt (Betrag des Faktors vor dem x^2 ist größer als 1)
   - Scheitel liegt bei $S(0|-4)$

   (c) Kann umgestellt werden $\rightarrow \quad y = 0,5x^2 + 3$
   - Nach oben geöffnet (Faktor vor dem x^2 ist positiv)
   - Gestaucht (Betrag des Faktors vor dem x^2 ist kleiner als 1)
   - Scheitel liegt bei $S(0|3)$

   (d) Kann umgestellt werden $\rightarrow \quad y = x^2 - 4$
   - Nach oben geöffnet (Faktor vor dem x^2 ist positiv)
   - Normalparabel (Betrag des Faktors vor dem x^2 ist gleich 1)
   - Scheitel liegt bei $S(0|-4)$

2. (a)

$$\begin{aligned}
y &= 4 \cdot \left[x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right] \\
y &= 4 \cdot \left[x^2 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{3}{2}\right] \\
y &= 4 \cdot \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{4}
\end{aligned}$$

   $\rightarrow$ Aus Angabe: Parabel ist nach oben geöffnet.
   $\rightarrow$ Scheitel ist TP: $S(-\frac{1}{4}|-\frac{25}{4})$
   $\rightarrow$ Absolutes Maximum am Rand des Definitionsbereichs: $HP(5|104)$

   (b)

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{9} \cdot \left[x^2 + 243x - 9\right] \\
y &= -\frac{1}{9} \cdot \left[x^2 + 243x + (121,5)^2 - (121,5)^2 - 9\right] \\
y &= -\frac{1}{9} \cdot (x + 121,5)^2 + 1641,25
\end{aligned}$$

   $\rightarrow$ Aus Angabe: Parabel ist nach unten geöffnet.
   $\rightarrow$ Scheitel $S(-121,5|1641,25)$ liegt außerhalb des Definitionsbereichs.
   $\rightarrow$ Maximum und Minimum müssen an den Definitionsgrenzen liegen:
   Absolutes Minimum: $TP(3|-81)$
   Absolutes Maximum: $HP(0|1)$

3. (a) allgemeine Form der quadratischen Gleichung: $y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{array}{ll} \rightarrow \text{aus Punkt A:} & 1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ \rightarrow \text{aus Punkt B:} & \frac{5}{2} = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 - c \\ \rightarrow \text{aus Punkt C:} & 5 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c \end{array}$$

Löst man dieses Gleichungssystem (mögliche Verfahren: Einsetzverfahren, Gaussches Eliminationsverfahren, Additionsverfahren) so erhält man:

$$a = \frac{1}{2} \qquad b = -1 \qquad c = 1$$

$$\rightarrow \text{Funktionsgleichung der Parabel: } \underline{\underline{y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1}}$$

(b) → Zunächst überlegt man, für welche x-Werte die Funktionswerte gleich $\frac{3}{2}$ sind:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &= \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \\ 0 &= \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Die Parabel ist nach oben geöffnet, und besitzt an den Stellen $x = 1 + \sqrt{2}$ sowie $x = 1 - \sqrt{2}$ jeweils den Funktionswert $y = \frac{3}{2}$.

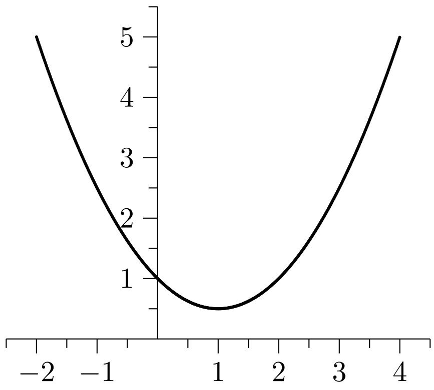
$$\rightarrow \text{y ist größer als } \tfrac{3}{2} \text{ für } \underline{\underline{x_1 < 1 - \sqrt{2}}} \text{ und } \underline{\underline{x_2 > 1 + \sqrt{2}}}.$$

(c)

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \\ y &= \frac{1}{2} \cdot \left[x^2 - 2x + 2\right] \\ y &= \frac{1}{2} \cdot \left[x^2 - 2x + (-1)^2 - (-1)^2 + 2\right] \\ y &= \frac{1}{2} \cdot (x - 1)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{Der Scheitel der Parabel liegt bei: } \underline{\underline{S\left(1|\frac{1}{2}\right)}}$$

(d)



4. $y = 2x^2 - 12x + 20$

5.

gegeben	y	$=$	$7x^2 - 14x - 7$
Faktor vor x^2 ausklammern	y	$=$	$7 \cdot [x^2 - 2x - 1]$
quadratisch ergänzen	y	$=$	$7 \cdot [x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 - 1]$
binomische Formel anwenden	y	$=$	$7 \cdot [(x-1)^2 - 2]$
Zusammenfassen	y	$=$	$7 \cdot (x-1)^2 - 14$

6.

Ansatz	$3 = 2x^2 + 2$
nach x auflösen	$x = \pm\sqrt{0,5}$

$\rightarrow$ D. h. bei $x = \pm\sqrt{0,5}$ beträgt der zugehörige y-Wert des Graphen 3. Die Parabel ist nach oben geöffnet. Deshalb sind alle Funktionswerte der Parabel für $-\sqrt{0,5} < x < \sqrt{0,5}$ kleiner als 3.

7.

(I) Aus Punkt A	-11	$=$	$a \cdot (-2)^2$	$+b \cdot (-2)$	$+c$
(II) Aus Punkt B	-2	$=$	$a \cdot 1^2$	$+b \cdot 1$	$+c$
(III) Aus Punkt C	-15	$=$	$a \cdot (2)^2$	$+b \cdot (2)$	$+c$

Gaußsches Eliminationsverfahren:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & -11 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & -15 \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & -11 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & -11 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}$$

Aus letzter Zeile: $-3 \cdot c = -9 \quad \rightarrow \quad c = 3$
Aus mittlerer Zeile: $-6b - 3 \cdot 3 = -3 \quad \rightarrow \quad b = -1$
Aus erster Zeile: $4a - 2 \cdot (-1) + 3 = -11 \quad \rightarrow \quad a = -4$

$\Rightarrow \quad y = -4x^2 - 1x + 3$
$\Rightarrow \quad y = -4 \cdot \left(x + \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{49}{16}$

3.5 Quadratische Gleichungen

Soll der Schnittpunkt einer Parabel mit der x-Achse berechnet werden, so kann es allein aus der Anschauung bereits mehrere Lösungsmöglichkeiten geben:

- Keine Lösung:
  - der Scheitel liegt oberhalb der x-Achse; die Parabel ist nach oben geöffnet
  - der Scheitel liegt unterhalb der x-Achse; die Parabel ist nach unten geöffnet
- Eine Lösung:
  - der Scheitel der Parabel liegt genau auf der x-Achse; es ist egal ob diese nach oben oder unten geöffnet ist.
- Zwei Lösungen:
  - der Scheitel liegt oberhalb der x-Achse; die Parabel ist nach unten geöffnet
  - der Scheitel liegt unterhalb der x-Achse; die Parabel ist nach oben geöffnet

Um nun die Nullstellen der quadratischen Funktion, also den Schnittpunkt des Graphen mit der x-Achse, zu berechnen, kann man sich überlegen, dass an diesen Punkten die y-Koordinate auf jeden Fall Null sein muss.

Eine Gleichung mit der Definitionsmenge $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{G}$ heißt quadratisch oder zweiten Grades, wenn sie auf die Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbf{R} \quad \wedge \quad a \neq 0$ gebracht werden kann. Man nennt dies die Hauptform.

Diese quadratische Gleichung lässt sich durch quadratische Ergänzung lösen:

$$\begin{array}{lrl}
 & 0 = & ax^2 + bx + c \\
\text{durch a teilen} & 0 = & x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \\
\text{quadrat. ergänzen} & 0 = & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \\
\text{Hauptnenner} & 0 = & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} \\
\text{Gleichung umstellen} & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = & \frac{b^2-4ac}{4a^2} \\
\text{Wurzel ziehen} & x + \frac{b}{2a} = & \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \\
\text{nach x auflösen} & x = & -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \\
\text{Lösungsformel} & x = & \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{array}$$

Wie bereits oben erwähnt kann es hierbei keine, eine oder zwei Lösungen geben. Dies hängt vom Wert unter der Wurzel, der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ ab.

- Keine Lösung: $D < 0$ → Es müsste die Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen werden!
- Eine Lösung: $D = 0$ → Das Plus-Minus hat keine Bedeutung mehr, da der Wert Null einmal zum $-b$ addiert, und einmal davon subtrahiert würde.
- Zwei Lösungen $D > 0$ → Nun kommt das Plus-Minus Zeichen zur Geltung.

Zerlegung in Linearfaktoren

Jede quadratische Gleichung kann in die so genannte Normalform $x^2+px+q=0$ gebracht werden.

Zwischen den Lösungen der quadratischen Gleichung und ihren Koeffizienten p und q gilt dann stets ein fester Zusammenhang:

Satz von Vieta
Hat die quadratische Gleichung $x^2+px+q=0$ die Lösungen x_1 und x_2, so gilt:

$$x_1 + x_2 = -p \qquad \text{und} \qquad x_1 \cdot x_2 = q$$

Damit kann die quadratische Gleichung umgeformt werden:

	$x^2 + px + q = 0$
p und q ersetzen	$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$
Klammern ausmultiplizieren	$x^2 - x_1x - x_2x + x_1 \cdot x_2 = 0$
x und x_2 ausklammern	$x \cdot (x - x_1) - x_2 \cdot (x - x_1) = 0$
$(x - x_1)$ ausklammern	$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$

$$\rightarrow \qquad \underline{\underline{x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)}}$$

Mit Hilfe der Lösungen x_1 und x_2 kann demnach die als Summe dargestellte Normalform der quadratischen Gleichung in ein Produkt zerlegt werden. Da die Variable x in beiden Faktoren jeweils nur mit der Potenz 1 vorkommt, heißen sowohl $(x - x_1)$, als auch $(x - x_2)$ Linearfaktoren.

Beispiele

- Stellen Sie die quadratische Gleichung $x^2 + 9x - 10 = 0$ als Produkt dar.

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_{1/2} &= \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} \\ x_{1/2} &= -4,5 \pm 5,5 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \underline{\underline{(x-1) \cdot (x+10) = 0}}$$

- Eine Lösung der quadratischen Gleichung $3x^2 - 9x + 6 = 0$ lautet $x_1 = 2$ Geben Sie die Linearfaktoren der Gleichung an.

$\rightarrow$ Gleichung in Normalform bringen: $x^2 - 3x + 2 = 0$
$\rightarrow$ Satz von Vieta anwenden:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p & \quad \text{oder} \quad & & x_1 \cdot x_2 &= q \\ 2 + x_2 &= 3 & & & 2 \cdot x_2 &= q \\ x_2 &= 1 & & & x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Linearfaktoren: $\underline{\underline{(x-2)}}$ und $\underline{\underline{(x_1 - 1)}}$

- Zerlegen Sie die quadratische Gleichung $2x^2 - 6m \cdot x + 8 = 0$ in Linearfaktoren.

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_{1/2} &= \frac{-(-6m) \pm \sqrt{(-6m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2} \\ x_{1/2} &= \frac{6m \pm \sqrt{36m^2 - 64}}{4} \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Fallunterscheidung wird notwendig, da Parameter in Diskriminante.

Fall 1: $36m^2 - 64 < 0 \quad \rightarrow \quad m < \frac{4}{3}$
Diskriminante ist kleiner Null $\rightarrow$ keine Lösung $\rightarrow$ $\mathbf{L} = \{\,\}$
Zerlegung in Linearfaktoren ist nicht möglich

Fall 2: $36m^2 - 64 = 0 \quad \rightarrow \quad m = \frac{4}{3}$
Diskriminante ist gleich Null $\rightarrow$ eine Lösung $\rightarrow$ $x_1 = x_2 = 2$
Zerlegung in Linearfaktoren: $(x-2) \cdot (x-2) = (x-2)^2$

Fall 3: $36m^2 - 64 > 0 \quad \rightarrow \quad m > \frac{4}{3}$
Diskriminante ist größer Null → zwei Lösungen

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{2}m + \sqrt{2,25m^2 - 4} \\ x_2 &= \frac{3}{2}m - \sqrt{2,25m^2 - 4} \end{aligned}$$

Zerlegung in Linearfaktoren:

$$(x-x_1)\cdot(x-x_2) = \left(x - \frac{3}{2}m - \sqrt{2,25m^2-4}\right)\cdot\left(x - \frac{3}{2}m + \sqrt{2,25m^2-4}\right)$$

3.6 Quadratische Ungleichungen

Eine Ungleichung über der Definitionsmenge $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{G}$ heißt quadratisch oder zweiten Grades, wenn sie die Form $ax^2 + bx + c < 0$ bzw. $ax^2 + bx + c > 0$ (mit $a \neq 0$) hat.

Lösung durch Fallunterscheidung:
Ein Produkt ist stets dann größer Null, wenn **beide** Faktoren größer, oder **beide** Faktoren kleiner Null sind.

$$a \cdot b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$$

Beispiele:

- $(x-2)\cdot(x-4) > 0$
  Fallunterscheidung:
  Fall 1: $x - 2 > 0 \quad \wedge \quad x - 4 > 0$
  $x > 2 \quad \wedge \quad x > 4$
  $\mathbf{L}_1 = \{x | x > 4\}$

  Fall 2: $x - 2 < 0 \quad \wedge \quad x - 4 < 0$
  $x < 2 \quad \wedge \quad x < 4$
  $\mathbf{L}_2 = \{x | x < 2\}$

  Vereinigung der Teillösungen:

  $$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2 = \{x | x < 2 \wedge x > 4\} = \mathbf{R}\backslash[2;4]$$

- $(x + \frac{5}{2}) \cdot (x - \frac{3}{2}) \leq 0$
  Fallunterscheidung:
  Fall 1: $x + \frac{5}{2} \leq 0 \quad \wedge \quad x - \frac{3}{2} \geq 0$
  $x \leq -\frac{5}{2} \quad \wedge \quad x \geq \frac{3}{2}$

$\mathbf{L}_1 = \{\,\}$

Fall 2: $x + \frac{5}{2} \geq 0 \quad \wedge \quad x - \frac{3}{2} \leq 0$
$x \geq -\frac{5}{2} \quad \wedge \quad x \leq \frac{3}{2}$
$\mathbf{L}_2 = \left[-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right]$

Vereinigung der Teillösungen:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2 = \left[-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right]$$

Übungsaufgaben

1. **Aufgaben zu Linearfaktoren**
   Siehe auch Beispiele im Buch S. 84
   Zerlegen Sie folgende quadratische Terme in Linearfaktoren:

   (a) $T(x) = x^2 + x - 6$

   (b) $T(x) = 25x^2 - 9$

   (c) $T(x) = 6x^2 - 13x - 5$

   (d) $T(x) = -20x^2 + 14x - 2$

   (e) $T(x) = 10x^2 - 3x - 4$

2. **Aufgaben zu Diskriminante**
   Siehe auch Beispiel im Buch S. 82 oben
   Bestimmen Sie die Werte des Parameters $k \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$, für die die Gleichungen zwei, genau eine bzw. keine Lösungen haben.

   (a) $2x^2 + 4x - 3k = 0$

   (b) $kx^2 + 6x + 1 = 0$

   (c) $4x^2 + 3kx - k^2 = 0$

   (d) $kx^2 - x + \frac{1}{3} = 0$

3. **Aufgaben zu quadratischen Ungleichungen**
   Siehe auch Beispiele im Buch S. 91f
   Lösen Sie folgende Ungleichungen, indem Sie den quadratischen Term in Linearfaktoren zerlegen.

   (a) $x^2 - 14x + 24 > 0$

   (b) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 10 \geq 0$

   (c) $-x^2 + \frac{19}{3}x - 2 < 0$

   (d) $\frac{1}{4}x^2 + 5x + 18,75 \leq 0$

   Lösen Sie folgende Ungleichungen mit Hilfe einer Vorzeichentabelle.

   (a) $x^2 - 3x + 2 > 0$

   (b) $x^2 + 2x - 35 > 0$

   (c) $x^2 - x + 5 \leq 0$

   (d) $x^2 - 10x + 21 < 0$

4. **Aufgaben zu Umkehrfunktionen**
   Siehe auch Beispiel im Buch S. 97
   Berechnen Sie die Umkehrfunktionen f^{-1} folgender Funktionen f, geben Sie den Definitionsbereich der Umkehrfunktion an, und zeichnen Sie jeweils die Graphen von f und f^{-1} in ein gemeinsames Koordinatensystem.

   (a) $f : x \mapsto 2x^2 \qquad x \in \mathbf{R}_0^+$

(b) $f : x \mapsto -0,5x^2 \qquad x \in \mathbf{R}_0^-$

(c) $f : x \mapsto x^2 \qquad x \in [1; 2,5]$

(d) $f : x \mapsto x^2 - 2x \qquad x \in [1; +\infty[$

(e) $f : x \mapsto 2x^2 - 1 \qquad x \in \mathbf{R}_0^+$

(f) $f : x \mapsto -x^2 + 2 \qquad x \in \mathbf{R}^-$

(g) $f : x \mapsto 4x^2 + 4x + 1 \qquad x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$

(h) $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1 \qquad x \in [1; +\infty[$

(i) $f : x \mapsto -x^2 - 2x + 1 \qquad x \in [-1; +\infty[$

(j) $f : x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{x} \qquad x \in \mathbf{R}_0^+$

(k) $f : x \mapsto 2\sqrt{x} + 1 \qquad x \in \mathbf{R}_0^+$

(l) $f : x \mapsto \sqrt{x+1} - 1 \qquad x \in [-1; +\infty[$

(m) $f : x \mapsto \frac{4}{5}\sqrt{x-1} - 1,5 \qquad x \in [1; +\infty[$

Lösungen

1. (a) $x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} \qquad \rightarrow \qquad T(x) = (x-2)(x+3)$

   (b) $x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} \qquad \rightarrow \qquad T(x) = \left(x - \frac{3}{5}\right)\left(x + \frac{3}{5}\right)$

   (c) $x_{1/2} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{((-13)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-5)}}{2 \cdot 6} \qquad \rightarrow \qquad T(x) = (x - 2,5)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

   (d) $x_{1/2} = \frac{-14 \pm \sqrt{(14^2 - 4 \cdot (-20) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-20)} \qquad \rightarrow \qquad T(x) = \left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

   (e) $x_{1/2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{((-3)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-4)}}{2 \cdot 10} \qquad \rightarrow \qquad T(x) = \left(x - \frac{4}{5}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

2. (a) Diskriminante: $D = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3k)$

   Keine Lösung für: $D < 0 \quad \leftrightarrow \quad k < -\frac{2}{3}$
   Eine Lösung für: $D = 0 \quad \leftrightarrow \quad k = -\frac{2}{3}$
   Zwei Lösungen für: $D > 0 \quad \leftrightarrow \quad k > -\frac{2}{3}$

   (b) Diskriminante: $D = 6^2 - 4 \cdot k \cdot 1$

   Keine Lösung für: $D < 0 \quad \leftrightarrow \quad k > 9$
   Eine Lösung für: $D = 0 \quad \leftrightarrow \quad k = 9$
   Zwei Lösungen für: $D > 0 \quad \leftrightarrow \quad k < 9$

(c) Diskriminante: $D = (3k)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-k^2)$

Keine Lösung für:	$D < 0$	$\leftrightarrow$	nicht möglich
Eine Lösung für:	$D = 0$	$\leftrightarrow$	$k = 0$
Zwei Lösungen für:	$D > 0$	$\leftrightarrow$	$k \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$

(d) Diskriminante: $D = (-1)^2 - 4 \cdot k4 \cdot \frac{1}{3}$

Keine Lösung für:	$D < 0$	$\leftrightarrow$	$k > \frac{3}{4}$
Eine Lösung für:	$D = 0$	$\leftrightarrow$	$k = \frac{3}{4}$
Zwei Lösungen für:	$D > 0$	$\leftrightarrow$	$k < \frac{3}{4}$

3. (a) Quadratische Gleichung mit Linearfaktoren: $(x-12)(x-2) > 0$
$x - 12 > 0 \quad \wedge \quad x - 2 > 0 \qquad$ oder $\qquad x - 12 < 0 \quad \wedge \quad x - 2 < 0$
$\rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{R}\backslash[2; 12]$

(b) Quadratische Gleichung mit Linearfaktoren: $(x-4)(x+10) \geq 0$
$x - 4 \geq 0 \quad \wedge \quad x + 10 \geq 0 \qquad$ oder $\qquad x - 4 \leq 0 \quad \wedge \quad x + 10 \leq 0$
$\rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{R}\backslash[-10; 4]$

(c) Quadratische Gleichung mit Linearfaktoren: $\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-6) > 0$
$x - \frac{1}{3} > 0 \quad \wedge \quad x - 6 > 0 \qquad$ oder $\qquad x - \frac{1}{3} < 0 \quad \wedge \quad x - 6 < 0$
$\rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{R}\backslash\left[-\frac{1}{3}; 6\right]$

(d) Quadratische Gleichung mit Linearfaktoren: $(x+5)(x+15) \leq 0$
$x + 5 \geq 0 \quad \wedge \quad x + 15 \leq 0 \qquad$ oder $\qquad x + 5 \leq 0 \quad \wedge \quad x + 15 \geq 0$
$\rightarrow \mathbf{L} = [-15; -5]$

(a) Nullstellen: $x_{1/2} = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}$
Parabel ist nach oben geöffnet

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
sgn(y)	$+1$	0	-1	0	$+1$

$\rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \mathbf{R}\backslash[1; 2]}}$

(b) Nullstellen: $x_{1/2} = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-35)}}{2\cdot1}$
Parabel ist nach oben geöffnet

x	$-\infty$	-7		5	$+\infty$
sgn(y)	$+1$	0	-1	0	$+1$

$\rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \mathbf{R}\backslash[-7; 5]}}$

(c) Nullstellen: $x_{1/2} = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}$
$\rightarrow$ Diskriminante ist kleiner Null, d. h. es gibt keine Nullstelle. Da Parabel nach oben geöffnet ist gibt es damit auch keinen Wert kleiner als Null.

$\rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{\,\}}}$

(d) Nullstellen: $x_{1/2} = \frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot21}}{2\cdot1}$
Parabel ist nach oben geöffnet

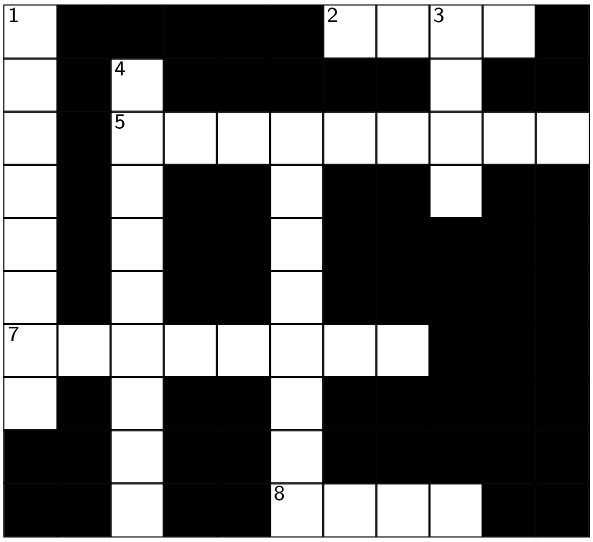
x	$-\infty$	3		7	$+\infty$
$\text{sgn}(y)$	$+1$	0	-1	0	$+1$

$\rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{x|3 < x < 7\}}}$

4. (a) $f^{-1} : x \mapsto \sqrt{\frac{x}{2}} \qquad x \in \mathbf{R}_0^+$
   (b) $f^{-1} : x \mapsto -\sqrt{-2x} \qquad x \in \mathbf{R}_0^-$
   (c) $f^{-1} : x \mapsto \sqrt{x} \qquad x \in [1; 6,25]$
   (d) $f^{-1} : x \mapsto 1 + \sqrt{1+y} \qquad x \in [-1; +\infty[$
   (e) $f^{-1} : x \mapsto \sqrt{0,5(x-1)} \qquad x \in -1; +\infty[$
   (f) $f^{-1} : x \mapsto -\sqrt{-(x-2)} \qquad x \in]-\infty; 2[$
   (g) $f^{-1} : x \mapsto -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{x} \qquad x \in]0; \infty[$
   (h) $f^{-1} : x \mapsto 1 + \sqrt{x} \qquad x \in [0; \infty[$
   (i) $f^{-1} : x \mapsto -1 + \sqrt{2-x} \qquad x \in]-\infty; 2[$
   (j) $f^{-1} : x \mapsto 4x^2 \qquad x \in \mathbf{R}_0^+$
   (k) $f^{-1} : x \mapsto \frac{1}{4}(x-1)^2 \qquad x \in [1; +\infty[$
   (l) $f^{-1} : x \mapsto (x+1)^2 - 1 \qquad x \in [-1; +\infty[$
   (m) $f^{-1} : x \mapsto \frac{25}{16}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 1 \qquad x \in [-1,5; +\infty[$

Quadratische Funktionen

Kreuzworträtsel



Waagrecht

2 In welche Richtung ist eine Normalparabel geöffnet?

5 Wie nennt man bei einer nach oben geöffneten Parabel den Punkt mit dem kleinsten y-Wert?

7 Jede Parabel hat einen höchsten, bzw. einen tiefsten Punkt. Wie wird dieser allgemein bezeichnet?

8 Welchen y-Wert hat der Scheitel bei der quadratischen Funktion $y = 4x^2 + 9$?

Senkrecht

1 Wie nennt man den Schnittpunkt eines Graphen mit der x-Achse?

3 Welchen Wert hat die x-Koordinate des Scheitels der quadratischen Funktion $y = 3(x-1)^2 + 5$?

4 Das quadratische Glied einer quadratischen Funktion wird mit einem Wert kleiner eins multipliziert. Was geschieht mit der Kurve (Substantiv angeben)?

6 Wie lautet der mathematische Fachbegriff für „Zuordnungsvorschrift“?

Quadratische Funktionen

Kreuzworträtsel

1 A						2 O	B	3 E	N	
B		4 S						I		
S		5 T	I	E	F	P	U	N	K	T
Z		A			U			S		
I		U			N					
S		C			K					
7 S	C	H	E	I	T	E	L			
E		U			I					
		N			O					
		G			8 N	E	U	N		

Waagrecht

2 In welche Richtung ist eine Normalparabel geöffnet?

5 Wie nennt man bei einer nach oben geöffneten Parabel den Punkt mit dem kleinsten y-Wert?

7 Jede Parabel hat einen höchsten, bzw. einen tiefsten Punkt. Wie wird dieser allgemein bezeichnet?

8 Welchen y-Wert hat der Scheitel bei der quadratischen Funktion $y = 4x^2 + 9$?

Senkrecht

1 Wie nennt man den Schnittpunkt eines Graphen mit der x-Achse?

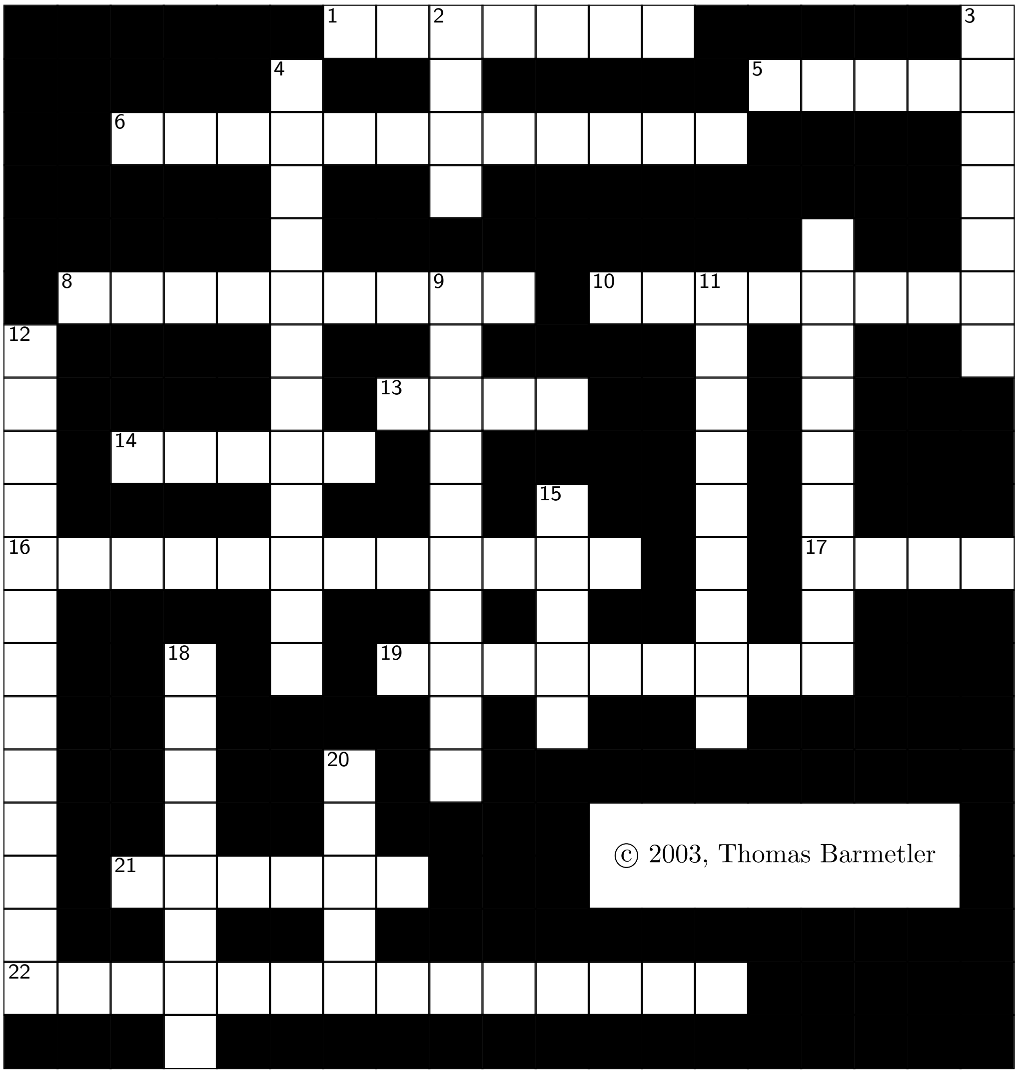
3 Welchen Wert hat die x-Koordinate des Scheitels der quadratischen Funktion $y = 3(x-1)^2 + 5$?

4 Das quadratische Glied einer quadratischen Funktion wird mit einem Wert kleiner eins multipliziert. Was geschieht mit der Kurve (Substantiv angeben)?

6 Wie lautet der mathematische Fachbegriff für „Zuordnungsvorschrift“?

Quadratische Funktionen

Kreuzworträtsel



Quadratische Funktionen

Kreuzworträtsel

						1 P	R	2 O	D	U	K	T						3 P
					4 V			B						5 V	I	E	T	A
		6 S	C	H	E	I	T	E	L	F	O	R	M					R
					R			N										A
					S										T			B
	8 S	T	R	E	C	K	U	9 N	G		10 A	B	11 S	Z	I	S	S	E
12 N					H			O					T		E			L
O					I		13 D	R	E	I			A		F			
R		14 U	N	T	E	N		M					U		P			
M					B			A		15 S			C		U			
16 A	B	S	O	L	U	T	G	L	I	E	D		H		17 N	E	U	N
L					N			F		C			U		K			
P			18 S		G		19 H	O	C	H	P	U	N	K	T			
A			C					R		S			G					
R			H			20 F		M										
A			E			U												
B		21 S	I	E	B	E	N											
E			T			N												
22 L	I	N	E	A	R	F	A	K	T	O	R	E	N					
			L															

Quadratische Funktionen

Kreuzworträtsel - Angaben

Waagrecht

1 Im Term $ax^2 + bx + c$ ist eine Parabel durch eine Summe ausgedrückt. Wie kann man die Parabel noch angeben?

5 Eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat die Lösungen x_1 und x_2. Nach wem wurde der Zusammenhang $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$ benannt?

6 Wie muss die Funktion einer Parabel gegeben sein damit die Koordinaten des Scheitels direkt abzulesen sind?

8 Was bewirkt der Faktor a in der Funktion $y = a(x - x_S)^2 + y_S$ falls er größer als 1 ist?

10 Wie nennt man den Schnittpunkt eines Graphen mit der x-Achse?

13 Um wieviel Einheiten ist die Parabel $y = 2(x - 3)^2 + 1$ nach rechts verschoben?

14 In welche Richtung ist der Graph der Funktion $f(x) = -4x^2 + 4x + 4$ geöffnet?

16 Geben Sie eine andere Bezeichnung für das konstante Glied einer quadratischen Funktion an. 17 Welchen y-Wert hat der Scheitel bei der quadratischen Funktion $y = 4x^2 + 9$?

19 Wie nennt man den Punkt eines Graphen mit dem größten x-Wert?

21 Wie lautet die y-Koordinate der Parabel $f(x) = -3(x + 4)^2 + 7$?

22 Eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ kann auch als Produkt dargestellt werden. Wie nennt man die Faktoren?

Senkrecht

2 In welche Richtung ist eine Normalparabel geöffnet?

3 Wie nennt man den Graph einer quadratischen Funktion?

4 Was bewirkt das konstante Glied in der Funktion $y = 2x^2 + 3$?

7 Geben Sie die Bezeichnung für den Punkt eines Graphen mit dem kleinsten y-Wert an.

9 Die Funktion einer Parabel ist mit $y = ax^2 + bx + c$ angegeben. Wie bezeichnet man diese Form?

11 Die quadratische Funktion $f(x) = x^2$ wird mit dem Faktor $0,25$ multipliziert. Was ist die Folge?

12 Wie nennt man den Graphen der Funktion $y = x^2$?

15 Um welchen Faktor wird die Parabel $f(x) = 6(x - 3)^2 - 5$ gestreckt?

18 Jede Parabel mit **D**=**R** hat einen höchsten oder einen tiefsten Punkt. Wie nennt man diesen?

20 Um wieviel Einheiten muss die Parabel $y = x^2 - 1$ nach rechts verschoben werden damit ihr Scheitel deckungsgleich mit dem Tiefpunkt der Parabel $f(x) = 2x^2 + 4$ liegt?

4 Ganzrationale Funktionen

4.1 Polynomfunktionen

> Eine Funktion, die man auf die Form $f : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ mit $x \in \mathbf{R}$ bringen kann, heißt ganzrationale Funktion n-ten Grades.

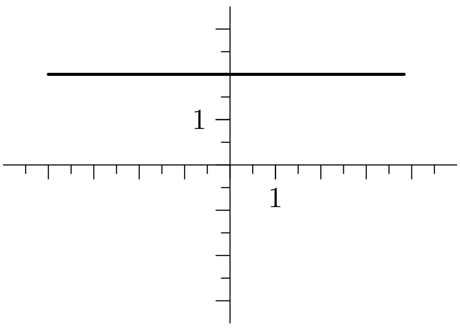
Dabei sind alle Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ mit $a_n \neq 0$ reelle Konstanten. Der Funktionsterm wird Polynom n-ten Grades genannt.

Es gilt, dass

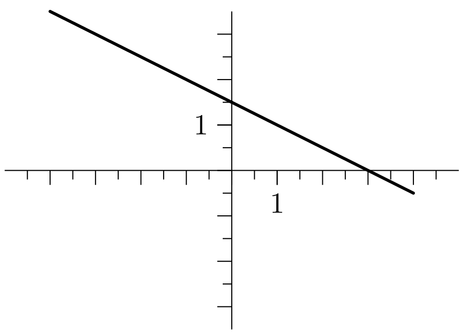
- die ganzrationale Funktion ersten Grades $f(x) = a_1x + a_0$ mit der linearen Funktion $f(x) = mx + t$ identisch ist.
- die ganzrationale Funktion zweiten Grades $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ mit der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ übereinstimmt.
- jede Potenzfunktion $f(x) = x^2$ mit $n \in \mathbf{N}^*$ eine ganzrationale Funktion ist.

Beispiele für ganzrationale Funktionen:

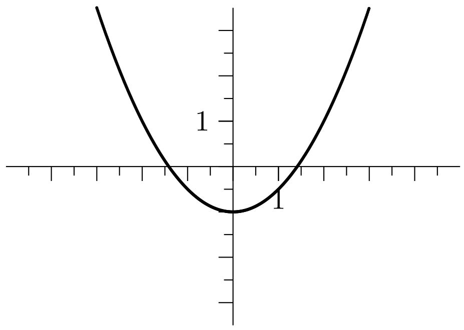
Grad 0:
$f(x) = 2$



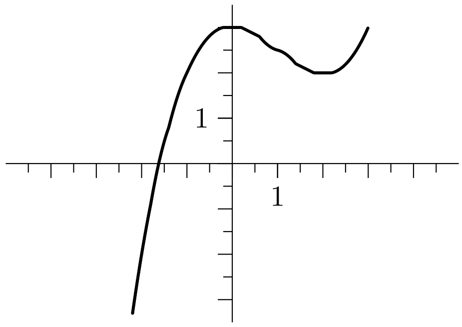
Grad 1:
$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$



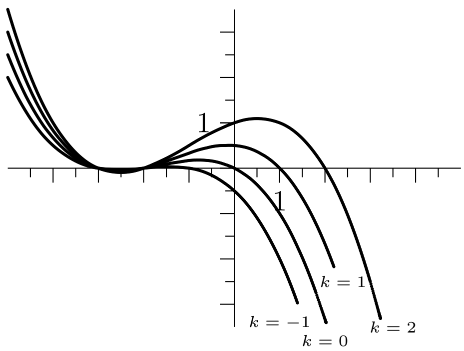
Grad 2:
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$



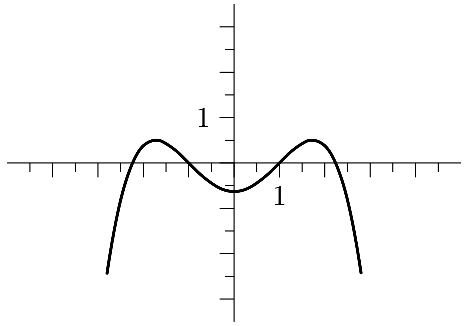
Grad 3:
$f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 3x^2 + 12)$



Grad 3 mit Parameter k:
$f(x) = -\frac{1}{12}(x^3 + (5-k)x^2 + (6-5k)x - 6k)$



Grad 4:
$f(x) = -\frac{1}{8}(x^4 - 6x^2 + 5)$



Welche Aussagen können nun über eine Funktion wie folgende gemacht werden?

$$f(x) : y = x^2 + 8x + 15$$

Da es ein Polynom zweiten Grades ist, kann man vermuten dass der Graph symmetrisch zu einer senkrechten Achse liegt. Weil jedoch auch ungerade Exponenten vorkommen kann es sich auf keinen Fall um die y-Achse handeln.

Deshalb wird nun versucht das Koordinatensystem so zu verschieben, dass die neue y-Achse mit der Spiegelachse übereinstimmt. In der Folge müsste die Funktion im neuen Koordinatensystem eine Funktionsgleichung haben, in der ausschließlich gerade Exponenten vorkommen.

Beweis:

1. **Berechnung der Scheitelform**

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 8x + 15 \\ y &= x^2 + 8x + 4^2 - 4^2 + 15 \\ y &= (x+4)^2 - 1 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Scheitelpunkt $S(-4|-1)$

2. **Lineare Koordinatentransformation**
   Das neue Koordinatensystem $\overline{x}/\overline{y}$ soll seinen Ursprung im Scheitel des Graphen haben. Deshalb muss die x-Achse um 1 Einheit nach unten, und die y-Achse um 4 Einheiten nach links verschoben werden.

   $$\begin{array}{lcr} \overline{x} = x - x_S & & \overline{y} = y - y_S \\ \overline{x} = x + 4 & \text{Transformationsgleichungen} & \overline{y} = y + 1 = \end{array}$$

3. **Transformationsgleichungen in Scheitelgleichungen einsetzen**

   $$\begin{aligned} y &= (x+4)^2 - 1 \\ \overline{y} - 1 &= ([\overline{x} - 4] + 4)^2 - 1 \\ \overline{y} &= \overline{x}^2 \end{aligned}$$

   → Die Funktion ist im neuen Koordinatensystem achsensymmetrisch zur $\overline{y}$-Achse.
   → Die Funktion war im alten Koordinatensystem achsensymmetrisch zur Geraden $x = -4$.

Ähnliche Überlegungen sollen nun bei einer Polynomfunktion 3.Grades angestellt werden. Auch hier sollen Aussagen bezüglich der Symmetrie der Funktion gemacht werden. Diese ist wie folgt gegeben:

$$f(x) : x \mapsto x^3 + 3x^2 + 5x + 6$$

Vorgehensweise:

1. **Aus der Formelsammlung: Binomische Formel dritten Grades**

   $$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

2. **Koeffizientenverlgeich von $3x^2$ mit $3ax^2$:**

   $$3x^2 = 3ax^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 3a \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$$

3. **Kubische Ergänzung vornehmen:**

   $$y = x^3 + 3x^2 + \underbrace{(5x - 2x)}_{=3a^2x} + 2x + 6$$

4. **Zusammenfassen:**

   $$y = (x+1)^3 + 2x + 5$$

5. **Die beiden letzten Glieder geeignet erweitern bzw. umstellen:**

   $$\begin{aligned} y &= (x+1)^3 + 2x + 2 + 3 \\ y &= (x+1)^3 + 2(x+1) + 3 \\ y - 3 &= (x+1)^3 + 2(x+1) \end{aligned}$$

6. **Transformationsgleichungen aufstellen:**

$$\overline{y} = y - 3 \qquad \overline{x} = x + 1$$

7. **Funktionsgleichung im neuen Koordinatensystem angeben:**

$$\overline{y} = \overline{x}^3 + 2\overline{x}$$

→ Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung im neuen $\overline{x}$-$\overline{y}$-Koordinatensystem.
→ Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Punkt $P(-1|3)$ im ursprünglichen x-y-Koordinatensystem.

Da die kubische Ergänzung bei Polynomfunktionen 3. Grades immer durchgeführt werden kann, ist jede ganzrationale Funktion 3. Grades punktsymmetrisch zu einem bestimmten Punkt P (jedoch nicht zwangsläufig zum Ursprung!)

Beispiele:

1. Untersuchen Sie nachfolgende Funktionen auf Symmetrie.
   (a) $f : x \mapsto 4x^4 - 2x^2 + 1$
   (b) $f : x \mapsto x^3 - 5x + 1$
   (c) $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + x$
   (d) $f : x \mapsto -3x^6 - 5x^4$
   (e) $f : x \mapsto -\frac{1}{7}x^6 - \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{6}$
   (f) $f : x \mapsto 8x^5 - 10x^3 + 16x$
   (g) $f : x \mapsto 2x^4 + 5x^2 \qquad x \in [-2; 5]$
   (h) $f : x \mapsto 3x^7 - 4x^3 \qquad x \in [1; 4]$
   (i) $f_k : x \mapsto k^2x^3 - 2k^3x$
   (j) $f_k : x \mapsto (1-k)x^4 - k^2x^2 + k^3 - 3$
   (k) $f_k : x \mapsto (k^2-1)x^3 + kx^2 + (1+k)x$
2. Untersuchen Sie die Funktion $y = 3x^2 + 12x + 16$ auf Symmetrie.

Lösungen:

1. (a) Achsensymmetrisch zur y-Achse, da alle Exponenten gerade.
   (b) Da Funktion 3. Grades ist sie auf jeden Fall punktsymmetrisch. Da jedoch auch ein gerader Exponent vorkommt, besteht keine Punktsymmetrie zum Ursprung!
   → Koordinatentransformation mit dem Ziel nur ungerade Exponenten im Funktionsterm zu erhalten.

$$\begin{aligned} y &= x^3 - 5x + 1 \\ y - 1 &= x^3 - 5x \\ \overline{y} &= \overline{x}^3 - 5\overline{x} \end{aligned}$$

   → Transformationsgleichungen: $\overline{y} = y - 1 \qquad \overline{x} = x$
   → Punktsymmetrie zu $P(0|1)$
   (c) Nur ungerade Exponenten → Punktsymmetrie zum Ursprung
   (d) Nur gerade Exponenten → Achsensymmetrie zur y-Achse
   (e) Nur gerade Exponenten → Achsensymmetrie zur y-Achse
   (f) Nur ungerade Exponenten → Punktsymmetrie zum Ursprung
   (g) Keine Symmetrie zur y-Achse, da **D** nicht symmetrisch zur y-Achse.
   (h) Keine Punktsymmetrie zum Ursprung, da **D** nicht symmetrisch zur y-Achse.
   (i) Punktsymmetrie zum Ursprung (unabhängig von k)

(j) Achsensymmetrisch zur y-Achse (unabhängig von k)

(k) Achsensymmetrisch zur y-Achse für $k = -1$
Punktsymmetrisch zum Ursprung für $k = 0$
Für alle anderen k ist keine Aussage möglich.

2.

$$\begin{aligned}
y &= 3x^2 + 12x + 16 \\
y &= 3 \cdot \left[x^2 + 4x + \frac{16}{3}\right] \\
y &= 3 \cdot \left[x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 + \frac{16}{3}\right] \\
y &= 3 \cdot (x+2)^2 + 4 \\
y - 4 &= 3 \cdot (x+2)^2
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Transformationsgleichungen: $\overline{x} = x + 2$
$\overline{y} = y - 4$

$\rightarrow$ Neue Funktionsgleichung: $\overline{y} = 3 \cdot \overline{x}^2$ ist im neuen $\overline{xy}$-Koordinatensystem achsensymmetrisch zur $\overline{y}$-Achse, da nur gerade Exponenten vorkommen.
$\rightarrow$ Im alten xy-Koordinatensystem war die Funktion zur Geraden $x = -2$ symmetrisch.

4.2 Operationen mit Polynomfunktionen

Polynomfunktionen kann man genauso addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren wie jede reelle Zahl. Darüber hinaus kann man sie auch noch verketten. Allerdings ist das sichere beherrschen der Regeln für das Potenzrechnen (siehe Seite 7) eine unabdingbare Voraussetzung um diese Rechenoperationen anzuwenden.

- **Verkettung**

$$\mathbf{f}: x \mapsto 8x^2 - 2x + 1 \qquad \mathbf{g}: x \mapsto 2x - 9$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{f} \circ \mathbf{g}: x \mapsto 8 \cdot (2. - 9)^2 - 2 \cdot (2x - 9) + 1$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{g} \circ \mathbf{f}: x \mapsto 2 \cdot (8x^2 - 2x + 1) - 9$$

- **Addition**

$$\mathbf{f}: x \mapsto -2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6 \qquad \mathbf{g}: x \mapsto \sqrt{3}x^2 + 2x + 1$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{f} + \mathbf{g}: x \mapsto -2x^3 + (\frac{1}{2} + \sqrt{3})x^2 + 2x - 5$$

- **Subtraktion**

$$\mathbf{f}: x \mapsto -x^6 + 2x^4 - 3x^3 \qquad \mathbf{g}: x \mapsto 4x^5 - x^4 + 2x^3 - 4$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{f} - \mathbf{g}: x \mapsto -x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 5x^3 + 4$$

- **Multiplikation**

$$\mathbf{f}: x \mapsto 2x + 1 \qquad \mathbf{g}: x \mapsto 4x^2 - x$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}: x \mapsto (2x + 1) \cdot (4x^2 - x) = 8x^3 + 2x^2 - x$$

- **Division** (siehe auch Polynomdivision S.64)

$$\mathbf{f}: x \mapsto 7x^3 - 2x^2 + x + 3 \qquad \mathbf{g}: x \mapsto x^2 - 6x + 9$$

$$\rightarrow \quad \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}: x \mapsto \frac{7x^3 - 2x^2 + x + 3}{x^2 - 6x + 9} = 7x + 40 + \frac{98x - 357}{x^2 - 6x + 9}$$

4.3 Polynomdivision

Werden zwei Polynome $P_1(x)$ und $P_2(x)$ dividiert, so gibt es zwei Möglichkeiten:

- Die Division geht ohne Rest auf:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = Q(x)$$

- Die Division geht nicht auf, und es bleibt ein Rest:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{P_2(x)}$$

Beispiele:

$$\begin{array}{l}
(2x^3 - 9x^2 + 13x - 12) : (x - 3) = \underline{\underline{2x^2 - 3x + 4}} \\
\underline{-(2x^3 - 6x^2)} \\
\quad - 3x^2 + 13x - 12 \\
\quad \underline{-(-3x^2 + 9x)} \\
\qquad 4x - 12 \\
\qquad \underline{-(4x - 12)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(-x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 14x - 10) : (x^2 + 2) = \underline{\underline{-x^3 + 2x^2 + 7x - 4 - \frac{2}{x^2 + 2}}} \\
\underline{-(-x^5 - 2x^3)} \\
\quad 2x^4 + 7x^3 + 14x - 10 \\
\quad \underline{-(2x^4 + 4x^2)} \\
\qquad 7x^3 - 4x^2 + 14x - 10 \\
\qquad \underline{-(7x^3 + 14x)} \\
\qquad\quad - 4x^2 - 10 \\
\qquad\quad \underline{-(-4x^2 - 8)} \\
\qquad\qquad - 2
\end{array}$$

4.4 Nullstellen von Polynomfunktionen

Gegeben ist eine Polynomfunktion vom Grad n. Die Lösungen der zugehörigen Gleichung $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^+a_0 = 0$ heißen Nullstellen von f.

Geometrisch betrachtet sind die Nullstellen die Abszissen der Schnitt- oder Berührpunkte des Graphen mit der x-Achse.

Ist x_1 die Nullstelle einer Polynomfunktion $f(x)$ vom Grad n, dann ist folgende Zerlegung in Faktoren möglich:

$$f(x) = (x - x_1) \cdot g(x)$$

$f(x)$ ist also durch $(x - x_1)$ ohne Rest teilbar. Das Ergebnis dieser Division ist $g(x)$, was ein Polynom vom Grad $n - 1$ ist.

Lässt sich der Faktor $(x - x_1)$ m-mal aus $f(x)$ ausklammern, so nennt man x_1 eine m-fache Nullstelle. In diesem Fall gilt:

$$f(x) = (x - x_1)^m \cdot g(x)$$

Dabei ist $g(x)$ ein Polynom vom (n-m)-ten Grad, wobei $g(x_1) \neq 0$.

Ein Polynom vom Grad n kann in höchstens n lineare Faktoren zerlegt werden. Deshalb hat eine Funktion n-ten Grades höchstens n reelle Nullstellen, wobei mehrfache Nullstellen auch mehrfach gezählt werden.

4.4.1 Strategien zum Aufsuchen von Nullstellen

(a) Lineare Gleichung

$$\begin{array}{lrcl} \text{Polynomfunktion 1. Grades} & f(x) & = & 9x - 4 \\ \text{Lineare Gleichung} & 0 & = & 9x - 4 \\ \text{Lösung der lin. Gleichung} & x & = & \frac{4}{9} \end{array}$$

$\rightarrow$ f hat die einfache Nullstelle: $x_1 = \frac{4}{9}$

(b) Reinquadratische Gleichung mit konstantem Glied

$$\begin{array}{lrcl} \text{Polynomfunktion 2. Grades} & f(x) & = & \frac{16}{9}x^2 - 1 \\ \text{Quadratische Gleichung} & 0 & = & \frac{16}{9}x^2 - 1 \\ \text{umstellen} & x^2 & = & \frac{9}{16} \\ \text{Wurzel ziehen} & x & = & \pm\frac{3}{4} \end{array}$$

$\rightarrow$ f hat zwei einfache Nullstellen: $x_1 = +\frac{3}{4}$ $\quad x_2 = -\frac{3}{4}$

$\rightarrow$ Linearfaktorzerlegung $f(x) = (x - \frac{3}{4}) \cdot (x + \frac{3}{4})$

(c) Reinquadratische Gleichung ohne konstantes Glied

Polynomfunktion 2. Grades	$f(x)$	$=$	$7x^2$
Quadratische Gleichung	0	$=$	$7x^2$
	x^2	$=$	0
Wurzel ziehen	x	$=$	± 0

$\rightarrow$ f hat die doppelte Nullstelle: $x_{1/2} = 0$
(auch Nullstelle 2. Ordnung genannt)

$\rightarrow$ Linearfaktorzerlegung $f(x) = 7 \cdot (x - 0)^2$

(d) Gemischt quadratische Gleichung

Polynomfunktion 2. Grades	$f(x)$	$=$	$x^2 - x - 6$
Quadratische Gleichung	0	$=$	$x^2 - x - 6$
Lösungsformel	$x_{1/2}$	$=$	$\frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$
	$x_{1/2}$	$=$	$\frac{1 \pm 5}{2}$

$\rightarrow$ f hat die einfachen Nullstellen: $x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$

$\rightarrow$ Linearfaktorzerlegung $f(x) = (x - 3) \cdot (x + 2)$

(e) Gleichung 3. Grades ohne konstantes Glied

Polynomfunktion 3. Grades	$f(x)$	$=$	$2x^3 - 6x^2$
Faktor 2 ausklammern	$f(x)$	$=$	$2 \cdot (x^3 - 3x^2)$
Gleichung 3. Grades (Faktor 2 merken!)	0	$=$	$x^3 - 3x^2$
x^2 ausklammern	0	$=$	$x^2 \cdot (x - 3)$
Faktoren zu Null setzen	$x^2 = 0$	$\vee$	$(x - 3) = 0$
Lösungen	$x_{1/2} = \pm 0$	$\vee$	$x_3 = 3$

$\rightarrow$ f hat die doppelte Nullstelle: $x_{1/2} = 0$ und
die einfache Nullstelle $x_3 = 3$

$\rightarrow$ Linearfaktorzerlegung $f(x) = 2 \cdot (x - 0)^2 \cdot (x - 3)$

Anmerkung: Bei der einfachen Nullstelle schneidet der Graph die x-Achse,
bei der doppelten Nullstelle berührt er sie nur.

(f) Gleichung 3. Grades ohne konstantes Glied

Polynomfunktion 3. Grades	$f(x)$	$=$	$x^3 - x^2 + 7x$
Gleichung 3. Grades	0	$=$	$x^3 - x^2 + 7x$
x ausklammern	0	$=$	$x \cdot (x^2 - x + 7)$
Faktoren zu Null setzen	$x = 0$	$\vee$	$x^2 - x + 7 = 0$

$\rightarrow$ Die quadratische Gleichung hat keine reelle Lösung. Deshalb hat f nur die einfache Nullstelle: $x_1 = 0$

$\rightarrow$ Linearfaktorzerlegung $f(x) = (x - 0) \cdot (x^2 - x + 7)$

(g) Biquadratische Gleichung

Polynomfunktion 4. Grades	$f(x)$	$=$	$x^4 - 10x^2 + 9$
Gleichung 4. Grades	0	$=$	$x^4 - 10x^2 + 9$
Substitution	z	$=$	x^2
Quadratische Gleichung für z	0	$=$	$z^2 - 10z + 9$
Lösungsformel	$z_{1/2}$	$=$	$\frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$
Lösungen für z	$z_1 = 9$	$\wedge$	$z_2 = 1$
Rücksubstitution	$x^2 = 9$	$\wedge$	$x^2 = 1$
Lösungen für x	$x_{1/2} = \pm 3$	$\wedge$	$x_{3/4} = \pm 1$

$\rightarrow$ f hat vier einfache Nullstellen:
$x_1 = +3 \qquad x_2 = -3 \qquad x_3 = +1 \qquad x_4 = -1$

$\rightarrow$ Linearfaktorzerlegung $f(x) = (x - 3) \cdot (x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$

(h) Gleichung aus Linearfaktoren

Polynomfunktion 5. Grades	$f(x)$	$=$	$4 \cdot (x + 6)^3 \cdot (x - 2)^2$
Faktorisieren der Gleichung 5. Grades	0	$=$	$(x + 6)^3 \cdot (x - 2)^2$
Faktoren zu Null setzen	$(x + 6)^3 = 0$	$\vee$	$(x - 2)^2 = 0$
Lösungen	$x_{1/2/3} = -6$	$\vee$	$x_{4/5} = 2$

$\rightarrow$ f hat die dreifache Nullstelle $x_{1/2/3} = -6$ und die doppelte Nullstelle $x_{4/5} = 2$

Anmerkung: Bei der zweifachen Nullstelle berührt der Graph die x-Achse lediglich, bei der dreifachen Nullstelle berührt und durchsetzt er sie.

4.4.2 Aufsuchen von Nullstellen durch Polynomdivision

Gegeben sei eine Polynomfunktion $f(x)$ vom Grad 3 mit einem konstanten Glied $a_0 \neq 0$. Nun greift keine der vorher gezeigten Methoden zum finden einer Nullstelle. Sind jedoch einige Voraussetzungen gegeben, so kann man sich behelfen:

- Es kann davon ausgegangen werden, dass die Funktion mindestens eine ganzzahlige Nullstelle hat.
- Der Koeffizient a_3 habe den Wert 1.
- Alle anderen Koeffizienten seien ganzzahlig.

Nun kann der verallgemeinerte Satz von Vieta angewandt werden. Dieser besagt, dass die gesuchte Nullstelle ein ganzzahliger Teiler des x-freien Gliedes a_0 ist. Man muss also alle in Frage kommenden positiven und negativen Werte in den Funktionsterm einsetzen, bis dieser den Wert Null hat. Die erste Nullstelle x_1 ist gefunden.

Um die weiteren Nullstellen zu ermitteln wird eine Polynomdivision $\frac{f(x)}{(x-x_1)}$ durchgeführt. Man erhält ein Polynom vom Grad 2. Dessen Nullstellen sind nun sehr einfach mit Hilfe der Lösungsformel (siehe Seite 43) zu ermitteln.

Beispiel:
Gesucht sind die Nullstellen der Polynomfunktion

$$f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4x + 12$$

Koeffizient $a_3 = 1$:	$f(x) = -[x^3 + 3x^2 - 4x - 12]$
Nullstelle raten:	$f(1) = 12 \quad f(-1) = 6 \quad f(2) = 0$ $\rightarrow x_1 = 2$
Erster Linearfaktor:	$(x-2)$
Polynomdivision:	$(-x^3 - 3x^2 + 4x + 12) : (x-2) = -x^2 - 5x - 6$
Um die Nullstellen zu bestimmen muss gelten:	$(x-2) = 0 \vee -x^2 - 5x - 6 = 0$
Lösungsformel anwenden:	$x_{2/3} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{5 \pm 1}{-2}$
weitere Nullstellen:	$x_2 = -3 \qquad x_3 = -2$
f hat die einfachen Nullstellen:	$x_1 = 2 \qquad x_2 = -3 \qquad x_3 = -2$
Linearfaktorzerlegung:	$f(x) = (x-2) \cdot (x+3) \cdot (x+2)$

Ist eine gegebene Polynomfunktion dagegen vom 4. Grad, so kann die erste Nullstelle nur noch geraten werden (ohne den erweiterten Satz von Vieta). Durch anschließende Polynomdivision erhält man ein Polynom vom Grad 3. Nun ist das Vorgehen wie oben beschrieben.

Beispiel:
Gesucht sind die Nullstellen der Polynomfunktion

$$f(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 6$$

Nullstelle raten:	$f(1) = 0$ $\rightarrow x_1 = 1$
Erster Linearfaktor:	$(x - 1)$
Polynomdivision:	$(x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 6) : (x - 1) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$
Nullstelle raten:	$f(-2) = 0$ $\rightarrow x_2 = -2$
Zweiter Linearfaktor:	$(x + 2)$
Polynomdivision:	$(x^3 + 2x^2 - 3x - 6) : (x + 2) = x^2 - 3$
Nullstellen der quadr. Gleichung $x^3 - 3 = 0$:	$x_3 = \sqrt{3} \qquad x_4 = -\sqrt{3}$
f hat die einfachen Nullstellen:	$x_1 = 1 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = \sqrt{3} \qquad x_4 = -\sqrt{3}$
Linearfaktorzerlegung:	$f(x) = (x + 2) \cdot (x - 1) \cdot (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3})$

Aufgaben

Zerlegen Sie die folgenden Funktionen in ihre Linearfaktoren.

$a)$	$f(x) = x^3 - 4x$	$b)$	$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
$c)$	$f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$	$d)$	$f(x) = x^4 - x^2$
$e)$	$f(x) = 2x^3 - 20x^2 + 32x$	$f)$	$f(x) = \frac{4}{3}x^4 - \frac{1}{8}x^3$
$g)$	$f(x) = 3x^5 - 12x^3 + 12x$	$h)$	$f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{5}x$
$i)$	$f(x) = \frac{1}{16}x^4 - 1$	$j)$	$f(x) = \frac{3}{4}x^5 + 6x^4 - 9x^3$
$k)$	$f_k(x) = 2kx^4 - k^2x^2, \qquad k > 0$	$l)$	$f_k(x) = x^4 - 3kx^2 + 2k^2, \qquad k > 0$
$m)$	$f_k(x) = (k^2 - 4)x^3, \qquad k \in \mathbf{R}\backslash\{-2, 2\}$	$n)$	$f_k(x) = x^3 - \frac{k^2+1}{k} \cdot x^2 + x, \qquad k > 0$
$o)$	$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$	$p)$	$f(x) = -6x^3 + 23x^2 + 6x - 8$
$q)$	$f(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - 9x - 9$	$r)$	$f(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$

Lösungen

$a)$	$f(x) = x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$	$b)$	$f(x) = (x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 1)$
$c)$	$f(x) = (x + 2)^2 \cdot (x - 2)^2$	$d)$	$f(x) = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot x^2$
$e)$	$f(x) = 2 \cdot x \cdot (x - 2) \cdot (x - 8)$	$f)$	$f(x) = \frac{4}{3} \cdot x^3 \cdot \left(x - \frac{3}{32}\right)$
$g)$	$f(x) = 3 \cdot x \cdot (x + \sqrt{2})^2 \cdot (x - \sqrt{2})^2$	$h)$	$f(x) = x \cdot \left(x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{5}\right)$
$i)$	$f(x) = \frac{1}{16} \cdot (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 4)$		
$j)$	$f(x) = \frac{3}{4} \cdot x^3 \cdot (x - [-4 + \sqrt{28}]) \cdot (x - [-4 - \sqrt{28}])$		
$k)$	$f_k(x) = 2k \cdot x^2 \cdot \left(x - \sqrt{\frac{k}{2}}\right) \cdot \left(x + \sqrt{\frac{k}{2}}\right)$		
$l)$	$f_k(x) = (x + \sqrt{2k}) \cdot (x - \sqrt{2k}) \cdot (x + \sqrt{k}) \cdot (x - \sqrt{k})$		
$m)$	$f_k(x) = (k^2 - 4)x^3$	$n)$	$f_k(x) = x \cdot (x - k) \cdot \left(x - \frac{1}{k}\right)$
$o)$	$f(x) = (x - 1) \cdot (x^2 - x + 1)$	$p)$	$f(x) = -6 \cdot (x - 4) \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$
$q)$	$f(x) = (x - 3) \cdot (x + 3) \cdot (x^2 + x + 1)$	$r)$	$f(x) = (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x + 4)$

Anmerkungen:

Zu h) Es gibt nur die eine, einfache Nullstelle $x = 0$. Deshalb ist $f(x)$ nicht weiter zerlegbar.

Zu i) Es gibt die zwei doppelten Nullstellen $x = 2$ und $x = -2$. Soll die Funktion jedoch mit Linearfaktoren dargestellt werden, so kann der letzte Linearfaktor nicht weiter zerlegt werden! Grund: im Rechenweg $x^2 = -4$.

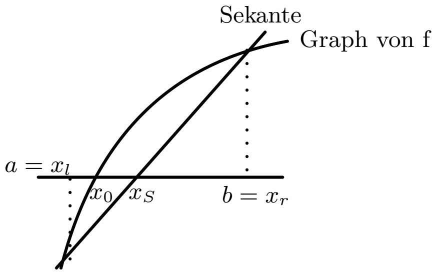
Zu m) Es gibt nur die eine, dreifache Nullstelle $x = 0$. Deshalb ist $f(x)$ nicht weiter zerlegbar.

Zu o) Es gibt nur die eine, einfache Nullstelle $x = 1$. Deshalb ist $f(x)$ nicht weiter zerlegbar.

4.4.3 Näherungsverfahren „Regula Falsi“ für Nullstellen

Ist bei einer Polynomfunktion vom Grad 3 oder höher keine Nullstelle ganzzahlig, bzw. sind die Nullstellen durch Probieren nicht zu finden, so muss ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der Nullstellen herangezogen werden.

Das hier vorgestellt Verfahren „Regula Falsi“ nimmt lineare Funktionen, deren Graphen Sekanten zum Graphen der Polynomfunktion sind, zu Hilfe.



x_l = linke Intervallgrenze
x_r = rechte Intervallgrenze
x_S = Nullstelle der Sekante
x_0 = gesuchte Nullstelle der Funktion f

Das „Regula falsi“ Verfahren ist ein Rekursionsverfahren, mit dem das Intervall um die gesuchte Nullstelle immer kleiner wird:

Erste Schätzung des Intervalls in dem sich die Nullstelle befindet:	$x_l = a \quad x_r = b$
Gleichung der Sekante aufstellen (siehe S. 27):	$y = f(x_l) + \frac{f(x_r)-f(x_l)}{x_r - x_l} \cdot (x - x_l)$
Nullstelle der Sekante berechnen:	$0 = f(x_l) + \frac{f(x_r)-f(x_l)}{x_r - x_l} \cdot (x_S - x_l)$
Nach x_S auflösen. x_S ist ein Näherungswert zu x_0	$x_S = x_l - f(x_l) \cdot \frac{x_r - x_l}{f(x_r)-f(x_l)}$
Neue Intervallgrenzen bestimmen:	$x_r = x_S$, falls $f(x_l) \cdot f(x_S) < 0$ $x_l = x_S$, falls $f(x_r) \cdot f(x_S) < 0$

Beispiel:
Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{5}{2}x + 3$ im Intervall $[-5; 0]$.

x_l	$f(x_l)$	x_r	$f(x_r)$	x_S	$f(x_S)$
$-5,0000$	$-0,1250$	$0,0000$	$3,0000$	$-4,8000$	$1,1760$
$-5,0000$	$-0,1250$	$-4,8000$	$1,1760$	$-4,9808$	$0,0064$
$-5,0000$	$-0,1250$	$-4,9808$	$0,0064$	$-4,9817$	$0,0000$
$-5,0000$	$-0,1250$	$-4,9817$	$0,0000$	$-4,9817$	$0,0000$

4.4.4 Felderabstreichen

Sind die Nullstellen einer Polynomfunktion bekannt, so lässt sich der Verlauf des zugehörigen Graphen bereits abschätzen. Schließlich bekommt man die Vorzeichenverteilung links bzw. rechts der Nullstellen recht schnell heraus. Am einfachsten geht es, wenn man eine Vorzeichentabelle verwendet.

Ist diese ausgefüllt, wird das Koordinatensystem in solche Bereiche aufgeteilt, in denen sich der Graph befindet, oder eben nicht befindet. Letztere werden durch schraffieren entwertet (=Felderabstreichen).

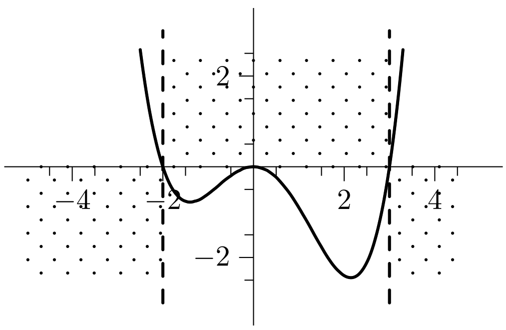
Beispiel:
Geben Sie den groben Verlauf des Graphen der Funktion
$f(x) = x^2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 3)$ an.

→ Da die Funktion bereits in Linearfaktoren zerlegt ist, können die Nullstellen einfach abgelesen werden:

doppelte Nullstelle:	$x_{1/2} = 0$
einfache Nullstelle:	$x_3 = -2$
einfache Nullstelle:	$x_4 = 3$

Vorzeichentabelle aufstellen:

x	$-\infty$	-2	$\dots$	0	$\dots$	3	$+\infty$
$sgn(x^2)$	$+1$	$*$	$+1$	0	$+1$	$*$	$+1$
$sgn(x+2)$	-1	0	$+1$	$*$	$+1$	$*$	$+1$
$sgn(x-3)$	-1	$*$	-1	$*$	-1	0	$+1$
$sgn(f(x))$	$+1$	0	-1	0	-1	0	$+1$



4.5 Aufstellen von Polynomfunktionen

Ist die Polynomfunktion des Graphen gesucht, der mehrere gegebene Punkte enthält, so muss man sich zuerst darüber im Klaren sein, welchen Grad die gesuchte Funktion maximal haben kann.

Da eine Funktion nur über das Aufstellen eines Gleichungssystems gefunden wird, ist die maximale Anzahl an Gleichungen bestimmend für die maximale Anzahl der berechenbaren Unbekannten. Bei der vorliegenden Aufgabenstellung sind die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, ... die Unbekannten. Man erkennt, dass mit n gegebenen Punkten stets n Gleichungen aufgestellt, und damit Funktionen vom Grad n-1 berechnet werden können.

Beispiel:
Gegeben seien die Punkte $A(-1|0)$, $B(0|-1)$, $C(1|2)$ und $D(2|9)$. Gesucht ist eine Polynomfunktion, deren Graph diese Punkte enthält.

→ Da 4 Punkte gegeben sind kann die gesuchte Funktion maximal vom Grad 3 sein. Deshalb lautet sie in der allgemeinen Form:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = y$$

Gleichungen aufstellen:

$$\begin{array}{llllll}
\text{Punkt A:} & a_3 \cdot (-1)^3 & +a_2 \cdot (-1)^2 & +a_1 \cdot (-1) & +a_0 & = 0 \\
\text{Punkt B:} & a_3 \cdot 0^3 & +a_2 \cdot 0^2 & +a_1 \cdot 0 & +a_0 & = -1 \\
\text{Punkt C:} & a_3 \cdot 1^3 & +a_2 \cdot 1^2 & +a_1 \cdot 1 & +a_0 & = 2 \\
\text{Punkt D:} & a_3 \cdot 2^3 & +a_2 \cdot 2^2 & +a_1 \cdot 2 & +a_0 & = 9
\end{array}$$

Lösen des Gleichungssystems mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren:

$$\left.\begin{array}{cccc|c}
-1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
8 & 4 & 2 & 1 & 9
\end{array}\right. \quad \rightarrow \quad
\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\
0 & -4 & -6 & -7 & -7 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array} \quad \rightarrow \quad
\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -6 & -3 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\text{Aus 4. Zeile:} & & \rightarrow & a_0 = -1 \\
\text{Aus 3. Zeile:} & -6a_1 - 3a_0 = -3 & \rightarrow & a_1 = 1 \\
\text{Aus 2. Zeile:} & a_2 + a_0 = 1 & \rightarrow & a_2 = 2 \\
\text{Aus 1. Zeile:} & a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 2 & \rightarrow & a_3 = 0
\end{array}$$

Die gesuchte Polynomfunktion war also nur vom Grad 2:

$$\underline{\underline{f(x) = 2x^2 + x - 2}}$$

Übungsaufgabe

Gegeben seien die Punkte $A(1|0)$, $B(0|2)$, $C(2|4)$ und $D(-1|4)$.

1. Ermitteln Sie die Funktion $f(x)$, deren Graph die gegebenen Punkte beinhaltet.
2. Geben Sie die Nullstellen der Funktion $f(x)$ an.
3. Zerlegen Sie den Funktionsterm in Linearfaktoren.
4. Fertigen Sie mit Hilfe des Verfahrens „Felderabstreichen“ eine grobe Skizze des Graphen der Funktion $f(x)$ an.

Lösung:

1. Da vier Punkte gegeben sind, kann es sich höchstens um eine Polynomfunktion 3. Grades mit den vier Unbekannten a_3, a_2, a_1 und a_0 handeln.

$$\begin{array}{llllll}
\text{Punkt A:} & a_3\cdot 1^3 & +a_2\cdot 1^2 & +a_1\cdot 1 & +a_0 & =0\\
\text{Punkt B:} & a_3\cdot 0^3 & +a_2\cdot 0^2 & +a_1\cdot 0 & +a_0 & =2\\
\text{Punkt C:} & a_3\cdot 2^3 & +a_2\cdot 2^2 & +a_1\cdot 2 & +a_0 & =4\\
\text{Punkt D:} & a_3\cdot (-1)^3 & +a_2\cdot (-1)^2 & +a_1\cdot (-1) & +a_0 & =4
\end{array}$$

Lösen des Gleichungssystems mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren:

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 2\\
8 & 4 & 2 & 1 & 4\\
-1 & 1 & -1 & 1 & 4
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
-1 & 1 & -1 & 1 & 4\\
8 & 4 & 2 & 1 & 4\\
0 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 2 & 0 & 2 & 4\\
0 & -4 & -6 & -7 & 4\\
0 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{array}
\rightarrow$$

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 2 & 0 & 2 & 4\\
0 & 0 & -6 & -3 & 12\\
0 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{llll}
\text{Aus 1. Zeile:} & a_3+a_2+a_1+a_0=0 & \rightarrow & a_3=1\\
\text{Aus 2. Zeile:} & 2a_2+2a_0=4 & \rightarrow & a_2=0\\
\text{Aus 3. Zeile:} & -6a_1-3a_0=12 & \rightarrow & a_1=-3\\
\text{Aus 4. Zeile:} & & \rightarrow & a_0=2
\end{array}$$

Die gesuchte Polynomfunktion lautet:

$$\underline{\underline{f(x)=x^3-3x+2}}$$

2. Die Nullstellen einer Funktion haben die Eigenschaft, dass der zugehörige y-Wert gleich Null ist.
   $\rightarrow$ Der gegebene Punkt $A(1|0)$ ist die erste Nullstelle.

   Mit Hilfe einer Polynomdivision kann der Grad der Funktion $f(x)$ zunächst reduziert werden:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 3x + 2) : (x - 1) = x^2 + x - 2 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad x^2 - 3x + 2 \\
\quad \underline{-(x^2 - x)} \\
\qquad -2x + 2 \\
\qquad \underline{-(-2x + 2)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$\rightarrow \quad f(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + x - 2)$$

   Soll der Funktionswert von $f(x)$ Null sein, so muss entweder der erste Faktor Null sein (dies ist die bereits bekannte erste Nullstelle), oder der zweite Faktor muss Null sein. Wann dieser den Wert Null annimmt wird mit Hilfe der Lösungsformel bestimmt:

$$
\begin{aligned}
x_{2/3} &= \tfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \\
x_{2/3} &= \tfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2}
\end{aligned}
$$

   Die Nullstellen von $f(x)$ lauten somit:

$$
\left.\begin{array}{r}
\underline{\underline{x_1 = 1}} \\
\underline{\underline{x_2 = 1}}
\end{array}\right\} \text{doppelte Nullstelle}
$$

$$\underline{\underline{x_3 = -2}} \qquad \text{einfache Nullstelle}$$

3. Da die Nullstellen aus der vorhergehenden Teilaufgabe bereits bekannt sind, ist die Zerlegung des Funktionsterms in Linearfaktoren kein Problem mehr:

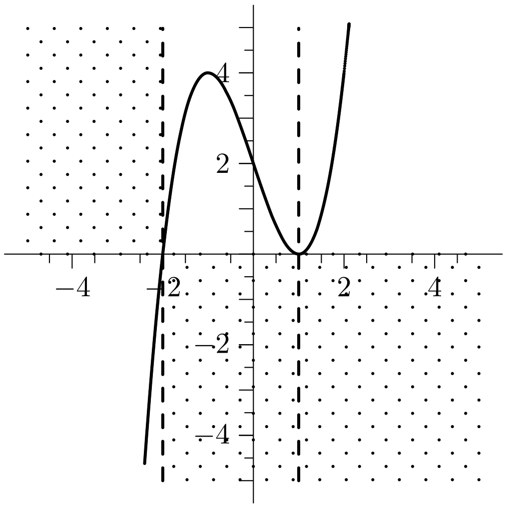
$$f(x) = (x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$$

$$\underline{\underline{f(x) = (x - 1)^2 \cdot (x + 2)}}$$

4. Aufstellen einer Vorzeichentabelle:

	$-\infty$	-2	$\dots$	1	$+\infty$
$sgn[(x-1)^2]$	$+1$	$*$	$+1$	0	$+1$
$sgn(x+2)$	-1	0	$+1$	$*$	$+1$
$sgn(f(x))$	-1	0	$+1$	0	$+1$

Übertragen der Ergebnisse der Vorzeichentabelle in ein Koordinatensystem:



5 Gebrochen rationale Funktionen

Unter einer gebrochen rationalen Funktion versteht man den Quotienten zweier ganzrationaler Funktionen. Dabei setzt sich der Funktionsterm aus dem Zählerpolynom vom Grad n und dem Nennerpolynom vom Grad m zusammen.
Die Nullstellen der Polynomfunktion im Nenner werden mit x_1, x_2, ..., x_k bezeichnet, wobei $k \leq m$ gelten muss.
Damit hat eine gebrochen rationale Funktion folgende Form:

$$f : x \mapsto \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}, \quad x \in \mathbf{R} \backslash \{x_1, x_2, \ldots x_k\}, \quad a_n \neq 0, \quad b_m \neq 0$$

Ist $n < m$, dann heißt die Funktion *echt gebrochen rational*, ist dagegen $n \geq m$, dann heißt die Funktion *unecht gebrochen rational*.

Beispiele:

- Echt gebrochen rationale Funktion:

$$f : x \mapsto \frac{2x^2 + x + 1}{x(x-2)(x-1)}, \qquad x \in \mathbf{R} \backslash \{0, 1, 2\}$$

- Unecht gebrochen rationale Funktion:

$$f : x \mapsto \frac{4x^2 - 3x + 1}{x + 1}, \qquad x \in \mathbf{R} \backslash \{-1\}$$

Durch Polynomdivision lässt sich diese Funktion in einen ganzrationalen und einen echt gebrochen rationalen Teil umwandeln:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 3x + 1}{x + 1} = 4x - 7 + \frac{8}{x - 1}$$

Bei gebrochen rationalen Funktionen haben die Nullstellen des Zählerpolynoms ganz andere Auswirkungen als die Nullstellen des Nennerpolynoms.
Für eine Nullstelle des Zählers ist der gesamte Funktionsterm gleich Null, also ist dieser x_N-Wert eine klassische Nullstelle der Funktion. Besitzt jedoch das Nennerpolynom eine Nullstelle, so bedeutet dies für die gebrochen rationale Funktion, dass durch Null dividiert wird! Dies führt dazu, dass die Funktion an allen Nullstellen des Nennerpolynoms nicht definiert ist.

Es sei $f : \mathbf{D}_f \mapsto \mathbf{R}$ eine beliebige gebrochen rationale Funktion. Ist x_N eine Nullstelle des Zählerpolynoms, so heißt sie *Nullstelle der gebrochen rationalen Funktion*, falls sie zum Definitionsbereich gehört.
Falls x_N jedoch eine Nullstelle des Nennerpolynoms ist, so heißt sie *Definitionslücke* und muss aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden.

5.1 Definitionslücken

Ist der Wert x_N die Nullstelle des Nennerpolynoms einer gebrochen rationalen Funktion, so ist die gesamte Funktion an dieser Stelle nicht definiert (Stichwort: Division durch Null!). Der Wert x_N muss deshalb aus der Definitionsmenge der Funktion ausgeschlossen werden und heißt Definitionslücke.

5.1.1 Polstellen

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x) = \frac{4x+2}{x^3-3x^2+2x-6} = \frac{4x+2}{(x-3)\cdot(x^2+2)}$$

Man erkennt, dass diese Funktion eine Nullstelle bei $x_N = -0,5$ und eine Definitionslücke bei $x_P = 3$ besitzt.

Wie verhält sich die Funktion nun in der Nähe dieser Definitionslücke? Um dies zu untersuchen berechnet man einige Funktionswerte (Näherungswerte) in der Nähe der Definitionslücke.

linksseitige Annäherung		rechtsseitige Annäherung	
$f(2)$	$\approx -1,6667$	$f(4)$	$\approx 1,0000$
$f(2,5)$	$\approx -2,9091$	$f(3,5)$	$\approx 2,2456$
$f(2,9)$	$\approx -13,0644$	$f(3,1)$	$\approx 12,4031$
$f(2,99)$	$\approx -127,6040$	$f(3,01)$	$\approx 126,9428$
$f(2,999)$	$\approx -1273,0579$	$f(3,001)$	$\approx 1272,3968$

Man erkennt, dass die Beträge der Funktionswerte immer weiter anwachsen, je weiter man sich mit den x-Werten der Definitionslücke annähert. Vermutlich wird sich dieses Verhalten unbeschränkt fortsetzen.
Bei der linksseitigen Annäherung nehmen die Funktionswerte unbeschränkt ab, während sie bei der rechtsseitigen Annäherung unbeschränkt zunehmen.
Diese Art der Definitionslücke wird *Pol mit Vorzeichenwechsel* genannt.

Hinweis:
Natürlich lässt sich der eben beschriebene Sachverhalt auch mathematisch beweisen. Dazu wird eine Variable h eingeführt, die eine sehr kleine positive Zahl sei. Ein x-Wert der sich ganz knapp neben der Definitionslücke $x_P = 3$ in obigem Beispiel befindet wäre damit $x = 3 + h$. Damit gilt:

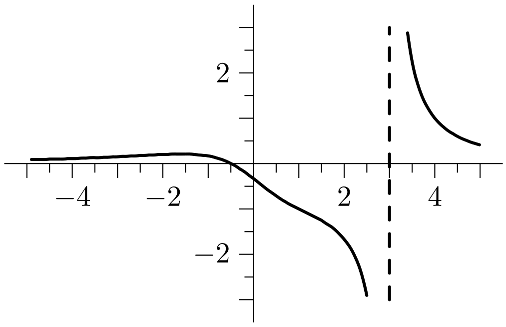
$$\begin{aligned}
f(3+h) &= \frac{4(3+h)+2}{(3+h)^3-3(3+h)^2+2(3+h)-6} \\
f(3+h) &= \frac{4(3+h)+2}{((3+h)-3)\cdot((3+h)^2+2)} \\
f(3+h) &= \frac{14+4h}{h\cdot[(3+h)^2+2]}
\end{aligned}$$

Lässt man h nun immer kleiner werden - also gegen Null gehen -, dann wachsen die Funktionswerte über alle Grenzen. Man sagt: „Die Funktionswerte gehen gegen unendlich.“. Dies wird symbolisch folgendermaßen dargestellt:

$$f(3+h) \to \infty \qquad \text{für} \qquad h \to 0$$

Auf ganz analoge Weise findet man den Zusammenhang:

$$f(3-h) \to -\infty \qquad \text{für} \qquad h \to 0$$



Der Graph der Funktion nähert sich der senkrechten Geraden bei $x = 3$ von beiden Seiten immer näher an, wird sie jedoch nie ganz erreichen. Eine solche Gerade heißt *Polasymptote* oder auch *vertikale Asymptote*.

Daneben gibt es auch noch einen *Pol ohne Vorzeichenwechsel*. Bei diesem ist es egal ob man sich von links oder rechts annähert. Die Funktionswerte auf beiden Seiten des Poles haben stets das gleiche Vorzeichen und wachsen über alle Grenzen.

Erweitert man den Funktionsterm mit einem Linearfaktor einer Polstelle - in diesem Beispiel mit $(x-3)$ - oder mit Potenzen dieses Linearfaktors, so ändert sich am Verhalten der Funktion in der Nähe der Polstelle gar nichts:

$$f(x) = \frac{(4x+2)}{(x-3)\cdot(x^2+2)} \qquad x \in \mathbf{R}\backslash\{3\}$$
$$f_1(x) = \frac{(4x+2)(x-3)}{(x-3)^2\cdot(x^2+2)} \qquad x \in \mathbf{R}\backslash\{3\}$$
$$f_2(x) = \frac{(4x+2)(x-3)^2}{(x-3)^3\cdot(x^2+2)} \qquad x \in \mathbf{R}\backslash\{3\}$$

Zusammenfassung:

Es sei f eine beliebige gebrochen rationale Funktion. Die Stelle $x_P \notin \mathbf{D}_f$ heißt *Polstelle* von f genau dann, wenn bei beliebiger Annäherung von x an $x_P \notin \mathbf{D}_f$ die Beträge $|f(x)|$ der Funktionswerte alle Grenzen übersteigen.
Die *Polasymptote (vertikale Asymptote)* ist die Gerade mit der Gleichung $x = x_P$, an die sich der Graph der Funktion immer mehr anschmiegt, je mehr man sich der Definitionslücke nähert.

Beispiel:
Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x-5}{3\cdot(x+1)^2}$. Geben Sie die maximale Definitionsmenge, die Nullstelle(n) und die Polstelle(n) dieser Funktion an.

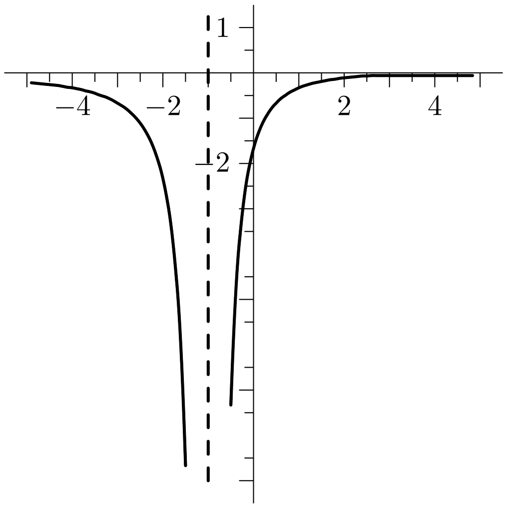
$\rightarrow$ Man erkennt, dass der Nenner für $x = -1$ zu Null wird. Deshalb lautet die maximale Definitionsmenge: $\underline{\underline{\mathbf{D} = \mathbf{R}\backslash\{-1\}}}$

$\rightarrow$ An der Stelle, wo der Nenner zu Null wird, ist auch die Polstelle dieser Funktion: $\underline{\underline{x_P = -1}}$

$\rightarrow$ Eine Nullstelle ist dann gegeben, wenn der Zähler der Funktion den Wert Null annimmt: $\underline{\underline{x_N = 5}}$

Auch hier kann das Verhalten nahe des Pols durch eine Vorzeichentabelle untersucht werden. Mathematischer gelingt dies, indem erneut die sehr kleine, positive Zahl h zu Hilfe genommen wird:

linksseitige Annäherung	rechtsseitige Annäherung
$f(-1-h) = \frac{(-1-h)-5}{3\cdot[(-1-h)+1]^2}$	$f(-1+h) = \frac{(-1+h)-5}{3\cdot[(-1+h)+1]^2}$
$f(-1-h) = \frac{-6-h}{3\cdot[-h]^2}$	$f(-1+h) = \frac{-6+h}{3\cdot[h]^2}$
$f(-1-h) = \frac{-6-h}{3h^2}$	$f(-1+h) = \frac{-6+h}{3h^2}$
$f(-1-h) \rightarrow -\infty \quad$ für $\quad h \rightarrow 0$	$f(-1+h) \rightarrow -\infty \quad$ für $\quad h \rightarrow 0$



5.1.2 Behebbare Definitionslücken

Wie verhält sich eine Funktion $f(x)$ falls der Wert x_0 nun eine Nullstelle des Zählerpolynoms und des Nennerpolynoms ist: $x_0 = x_N = x_P$?

Beispiel:
Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{4(x-1)^2+2(x-1)}{(x-1)\cdot x}$. Wie verhält sich die Funktion

in der Nähe von $x_0 = 1$?

linksseitige Annäherung		rechtsseitige Annäherung	
$f(0,5)$	$\approx 0,000$	$f(1,5)$	$\approx 3,000$
$f(0,9)$	$\approx 1,778$	$f(1,1)$	$\approx 2,182$
$f(0,99)$	$\approx 1,980$	$f(1,01)$	$\approx 2,020$
$f(0,999)$	$\approx 1,998$	$f(1,001)$	$\approx 2,002$
$f(0,9999)$	$\approx 2,000$	$f(1,0001)$	$\approx 2,000$

Das bedeutet, dass sich die y-Werte sowohl von der linken Seite der Definitionslücke, als auch von deren rechten Seite her genau dem Funktionswert $f(x_0 = 1) = 2$ annähern. Die Funktion ist also in der unmittelbaren Umgebung von $x_0 = 1$ beschränkt.

Im Definitionsbereich $\mathbf{D}_f = \mathbf{R}\backslash\{0,1\}$ stellt das Kürzen des Funktionsterms durch $x \neq 0$ eine Äquivalenzumformung dar. Damit gilt auch:

$$f(x) = \frac{4(x-1)+2}{x} \qquad x \in \mathbf{R}\backslash\{0,1\}$$

In diese neue Funktion könnte man auch $x = 1$ einsetzten, wenn dies durch die Definitionsmenge nicht ausdrücklich untersagt wäre! Man erhielte in diesem Fall den Funktionswert $f(x = 1) = 2$ und könnte so die Lücke schließen.
Auf diese Weise gelangt man zur *stetigen Fortsetzung* von f mit

$$f^* = \begin{cases} \frac{4(x-1)+2}{x}, & x \neq \{0,1\} \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

Mathematisch präziser lässt sich das Verhalten in der Nähe von $x_0 = 1$ mit Hilfe einer sehr kleinen, positiven Zahl h beschreiben. Ein x-Wert, der sich ganz knapp links von 1 befindet kann somit als $x = 1-h$ ausgedrückt werden. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
f(1-h) &= \frac{4([1-h]-1)^2 + 2([1-h]-1)}{([1-h]-1)\cdot[1-h]} \\
f(1-h) &= \frac{4(-h)^2 + 2(-h)}{(-h)\cdot[1-h]} \\
f(1-h) &= \frac{4h^2 - 2h}{h^2 - h} \\
f(1-h) &= \frac{h\cdot(4h-2)}{h\cdot(h-1)} \\
f(1-h) &= \frac{4h-2}{h-1}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\text{für } h \to 0 \quad \text{gilt} \quad f(1-h) \to 2}}$$

Dies bedeutet: Lässt man die h gegen Null gehen, so streben die Funktionswerte gegen 2.

Der Einfachheit halber, und da es sich um eine Äquivalenzumformung handelt, kann bei diesem Verfahren bereits mit dem gekürzten Term begonnen werden. Somit lautet die Annäherung von der rechten Seite:

$$\begin{aligned} f(1+h) &= \frac{4([1+h]-1)+2}{[1+h]} \\ f(1+h) &= \frac{4h+2}{1+h} \\ f(1+h) &= \frac{2\cdot(2h+1)}{1+h} \\ \Rightarrow &\quad \underline{\underline{\text{für } h \to 0 \quad \text{gilt} \quad f(1+h) \to 2}} \end{aligned}$$

Es ist also egal ob man sich von links, oder von rechts der Definitionslücke nähert, die Funktionswerte rücken immer näher an 2 heran.

Es sei $f : \mathbf{D}_f \to \mathbf{R}$ eine beliebige gebrochen rationale Funktion. Die Stelle $x_0 \in \mathbf{D}_f$ heißt stetig behebbare Definitionslücke von f genau dann, wenn bei beliebiger Annäherung von x an $x_0 \notin \mathbf{D}_f$ die Funktionswerte $f(x)$ gegen eine bestimmte reelle Zahl a streben.

Tipp für die Praxis:

Eine stetig behebbare Definitionslücke erkennt man daran, dass sie eine Nullstelle des Zählerpolynoms und auch eine Nullstelle des Nennerpolynoms ist, wobei die Vielfachheit der Zählerpolynomnullstelle größer oder zumindest gleich der Vielfachheit der Nennerpolynomnullstelle ist.

5.1.3 Verhalten von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$

Neben dem Verhalten an den Polstellen ist auch der Verlauf des Graphen einer Funktion für sehr große bzw. sehr kleine x-Werte interessant. Deshalb wird das Verhalten $f(x)$ für x gegen $\pm\infty$ untersucht.

Vorgehensweise:

- Zunächst werden die höchsten Exponenten des Zählers und des Nenners miteinander verglichen. Der höhere von beiden bestimmt dann das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$.
  Beispiele:

  $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5}{x^4-2x+1} = 0$ Graph nähert sich der x-Achse vom positiven her an.

  $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-2x^2}{3x^5+8x^2} = 0$ Graph nähert sich der x-Achse vom negativen her an.

  $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x^2}{x-7} \to +\infty$

- Entspricht der höchste Exponent des Zählers dem höchsten Exponenten des Nenners, so muss sowohl der Zähler als auch der Nenner durch die Variable mit dem höchsten Exponenten dividiert werden. Die daraus entstehenden Brüche im Zähler und im Nenner gehen für $x \to \pm\infty$ gegen Null. Es bleibt ein Bruch stehen, welcher den Grenzwert der Funktion für $x \to \pm\infty$ angibt.
  Beispiele:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x}{2x^3-4x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2x}{x^3}}{2-\frac{4x^2}{x^3}} = 0,5$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^5+2x^3+2x}{2x^5+5x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4+\frac{2x^3}{x^5}+\frac{2x}{x^5}}{2+\frac{5x^4}{x^5}} = -2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2-3}{2x^2+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6-\frac{3}{x^2}}{2+\frac{3}{x^2}} = 3$$

Übungsaufgaben

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich, die Nullstellen und die Pole (jeweils mit Vielfachheiten) der Funktionen an.
Untersuchen Sie ferner das Verhalten der Graphen in der Nähe der Polstellen und für $x \to \pm\infty$.

1. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$
2. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+7x+6}$
3. $f(x) = \frac{x^2-5}{x^3-3x^2+2x+6}$
4. $f(x) = \frac{x^3+7x^2-x-7}{x^3-3x^2+3x-1}$
5. $f(x) = \frac{x^3-4x}{x^2+1}$
6. $f(x) = \frac{2}{x^2-3x+2}$
7. $f(x) = \frac{x^3-x^2+5x-5}{x^3-x^2+x-1}$

Lösungen

1. Für Nullstellen muss gelten: $x^2 + x + 1 = 0$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \quad x_{N1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \\ &\rightarrow \quad \text{Diskriminante } < 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\text{keine Nullstellen}}} \end{aligned}$$

Für Pole muss gelten: $x^2 - x + 1 = 0$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \quad x_{P1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2-4}}{2} \\ &\rightarrow \quad \text{Diskriminante } < 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\text{keine Polstellen}}} \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Max. Definitionsbereich: $\underline{\underline{\mathbf{D}_{max} = \mathbf{R}}}$
Verhalten von $f(x)$ für $x \to +\infty$:
Zunächst ist das Verhalten nicht direkt ablesbar, deshalb wird der Zähler und der Nenner durch die Variable mit höchsten Exponenten (hier: x^2) geteilt. Damit erhält man:

$$f^* = \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Nun ist erkennbar, dass die Brüche im Zähler und im Nenner für $x \to \infty$ gegen Null gehen. Somit erhält man:

$$\underline{\underline{\lim_{x\to\infty} f(x) \to 1}}$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \to -\infty$:

$$\underline{\underline{\lim_{x\to-\infty} f(x) \to 1}}$$

2. Für Nullstellen muss gelten: $2x + 1 = 0$

$$\to \quad \underline{\underline{x_{N1} = -\frac{1}{2}}} \quad \text{„einfache“}$$

Für Pole muss gelten: $x^2 + 7x + 6 = 0$

$$\to \quad x_{P1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{-7 \pm 5}{2}$$

$$\to \quad \underline{\underline{x_{P1} = -1}} \quad \text{„einfache“} \qquad \underline{\underline{x_{P2} = -6}} \quad \text{„einfache“}$$

$\to$ Max. Definitionsbereich: $\underline{\underline{\mathbf{D}_{max} = \mathbf{R}\backslash\{-1; -6\}}}$
Verhalten bei $x_{P1} = -1$:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f(-1-h) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{2(-1-h)+1}{(-1-h)^2 + 7(-1-h) + 6}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{-1-2h}{h^2-5h}\right] \\
\lim_{h\to 0} f(-1-h) &\to +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f(-1+h) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{2(-1+h)+1}{(-1+h)^2 + 7(-1+h) + 6}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{-1+2h}{h^2+5h}\right] \\
\lim_{h\to 0} f(-1+h) &\to -\infty
\end{aligned}$$

Verhalten bei $x_{P2} = -6$:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f(-6-h) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{2(-6-h)+1}{(-6-h)^2 + 7(-6-h) + 6}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{-11-2h}{h^2+5h}\right] \\
\lim_{h\to 0} f(-6-h) &\to -\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f(-6+h) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{2(-6+h)+1}{(-6+h)^2 + 7(-6+h) + 6}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{-11+2h}{h^2-5h}\right] \\
\lim_{h\to 0} f(-6+h) &\to +\infty
\end{aligned}$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \to +\infty$:
Da der Exponent von x im Nenner höher ist als im Zähler, bestimmt der Nenner das Verhalten.

$$\underline{\underline{\lim_{x\to\infty} f(x) \to 0}}$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \to -\infty$:

$$\underline{\underline{\lim_{x\to-\infty} f(x) \to 0}}$$

3. Für Nullstellen muss gelten: $x^2 - 5 = 0$

$$\rightarrow \quad \underline{\underline{x_{N1} = \sqrt{5}}} \quad \text{„einfache“} \qquad \underline{\underline{x_{N2} = -\sqrt{5}}} \quad \text{„einfache“}$$

Für Pole muss gelten: $x^3 - 3x^2 + 2x + 6 = 0$

$\rightarrow$ Durch Raten: $\underline{\underline{x_{P1} = -1}}$ „einfache“

$\rightarrow$ Polynomdivision: $(x^3 - 3x^2 + 2x + 6) : (x + 1) = x^2 - 4x + 6$
Weitere Polstellen, falls $x^2 - 4x + 6 = 0$

$\rightarrow$ $x_{P2/3} = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 6}}{2}$

$\rightarrow$ Diskriminante < 0 $\rightarrow$ $\underline{\underline{\text{keine weiteren Polstellen}}}$

$\rightarrow$ Max. Definitionsbereich: $\underline{\underline{\mathbf{D}_{max} = \mathbf{R}\backslash\{-1\}}}$
Verhalten bei $x_{P1} = -1$:

$$\lim_{h\to 0} f(-1-h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{(-1-h)^2 - 5}{(-1-h)^3 - 3(-1-h)^2 + 2(-1-h) + 6}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{h^2 + 2h - 4}{-h^3 - 6h^2 - 11h}\right]$$

$$\lim_{h\to 0} f(-1-h) \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{h\to 0} f(-1+h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{(-1+h)^2 - 5}{(-1+h)^3 - 3(-1+h)^2 + 2(-1+h) + 6}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{h^2 - 2h - 4}{h^3 - 6h^2 + 11h}\right]$$

$$\lim_{h\to 0} f(-1+h) \rightarrow -\infty$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow +\infty$:
Da der Exponent von x im Nenner höher ist als im Zähler, bestimmt der Nenner das Verhalten.

$$\underline{\underline{\lim_{x\to\infty} f(x) \rightarrow 0}}$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow -\infty$:

$$\underline{\underline{\lim_{x\to -\infty} f(x) \rightarrow 0}}$$

4. Für Nullstellen muss gelten: $x^3 + 7x^2 - x - 7 = 0$

$\rightarrow$ Durch Raten: $\underline{\underline{x_{N1} = 1}}$ „einfache“

$\rightarrow$ Polynomdivision: $(x^3 + 7x^2 - x - 7) : (x - 1) = x^2 + 8x + 7$
Weitere Nullstellen, falls $x^2 + 8x + 7 = 0$

$\rightarrow$ $x_{N2/3} = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 7}}{2} = \dfrac{-8 \pm 6}{2}$

$\rightarrow$ $\underline{\underline{x_{N2} = -1}}$ „einfache“ $\quad$ $\underline{\underline{x_{N3} = -7}}$ „einfache“

Für Pole muss gelten: $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

→ Durch Raten: $\underline{\underline{x_{P1} = 1}}$

→ Polynomdivision: $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x - 1) = x^2 - 2x + 1$
Weitere Polstellen, falls $x^2 - 2x + 1 = 0$

→ $x_{P2/3} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = 1$

→ $\underline{\underline{x_{P2/3} = x_{P1} = 1}}$ „dreifache“

→ Max. Definitionsbereich: $\underline{\underline{\mathbf{D}_{max} = \mathbf{R}\backslash\{1\}}}$
Verhalten bei $x_{P1} = -1$:

$$\lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{(1-h)^3 + 7(1-h)^2 - (1-h) - 7}{(1-h)^3 - 3(1-h)^2 + 3(1-h) - 1}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{-h^3 + 10h^2 - 16h}{-h^3}\right]$$

Für $h \to 0$ erhält man: $\dfrac{0}{0}$

Aber: man kann h herauskürzen:

$$\lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{-h^2 + 10h - 16}{-h^2}\right]$$

$$\lim_{h\to 0} f(1-h) \to +\infty$$

$$\lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{(1+h)^3 + 7(1+h)^2 - (1+h) - 7}{(1+h)^3 - 3(1+h)^2 + 3(1+h) - 1}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{h^3 + 10h^2 + 16h}{h^3}\right]$$

Für $h \to 0$ erhält man: $\dfrac{0}{0}$

Aber: man kann h herauskürzen:

$$\lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{h^2 + 10h + 16}{h^2}\right]$$

$$\lim_{h\to 0} f(1+h) \to +\infty$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \to +\infty$:
Zunächst ist das Verhalten nicht direkt ablesbar, deshalb wird der Zähler und der Nenner durch die Variable mit höchsten Exponenten (hier: x^3) geteilt. Damit erhält man:

$$f^* = \frac{1 + \frac{7}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{7}{x^3}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}}$$

Nun ist erkennbar, dass die Brüche im Zähler und im Nenner für $x \to \infty$ gegen Null gehen. Somit erhält man:

$$\underline{\underline{\lim_{x\to\infty} f(x) \to 1}}$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \to -\infty$:

$$\underline{\underline{\lim_{x\to-\infty} f(x) \to 1}}$$

5. Für Nullstellen muss gelten: $x^3 - 4x = 0$

$$\begin{array}{ll} \rightarrow & \text{umstellen: } x \cdot (x^2 - 4) = 0 \\ \rightarrow & \underline{\underline{x_{N1} = 0}} \quad \text{„einfache“} \\ & \underline{\underline{x_{N2} = 2}} \quad \text{„einfache“} \qquad \underline{\underline{x_{N3} = -2}} \quad \text{„einfache“} \end{array}$$

Für Pole muss gelten: $x^2 + 1 = 0$

$$\rightarrow \quad \text{Gleichung hat keine Lösung} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\text{keine Polstellen}}}$$

$\rightarrow$ Max. Definitionsbereich: $\underline{\underline{\mathbf{D}_{max} = \mathbf{R}}}$ Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow +\infty$: Da der Exponent von x im Zähler höher ist als im Nenner, bestimmt der Zähler das Verhalten.

$$\underline{\underline{\lim_{x \to \infty} f(x) \rightarrow +\infty}}$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow -\infty$:

$$\underline{\underline{\lim_{x \to -\infty} f(x) \rightarrow -\infty}}$$

6. Es gibt $\underline{\underline{\text{keine Nullstellen}}}$.
Für Pole muss gelten: $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\begin{array}{ll} \rightarrow & x_{P1/2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} \\ \rightarrow & \underline{\underline{x_{P1} = 1}} \quad \text{„einfach“} \qquad \underline{\underline{x_{P2} = 2}} \quad \text{„einfach“} \end{array}$$

$\rightarrow$ Max. Definitionsbereich: $\underline{\underline{\mathbf{D}_{max} = \mathbf{R} \backslash \{1; 2\}}}$
Verhalten bei $x_{P1} = 1$:

$$\begin{array}{lll} \lim\limits_{h \to 0} f(1-h) & = & \lim\limits_{h \to 0} \left[\dfrac{2}{(1-h)^2 - 3(1-h) + 2} \right] = \lim\limits_{h \to 0} \left[\dfrac{2}{h^2 + h} \right] \\ \lim\limits_{h \to 0} f(1-h) & \rightarrow & +\infty \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \lim\limits_{h \to 0} f(1+h) & = & \lim\limits_{h \to 0} \left[\dfrac{2}{(1+h)^2 - 3(1+h) + 2} \right] = \lim\limits_{h \to 0} \left[\dfrac{2}{h^2 - h} \right] \\ \lim\limits_{h \to 0} f(1+h) & \rightarrow & -\infty \end{array}$$

Verhalten bei $x_{P2} = 2$:

$$\begin{array}{lll} \lim\limits_{h \to 0} f(2-h) & = & \lim\limits_{h \to 0} \left[\dfrac{2}{(2-h)^2 - 3(2-h) + 2} \right] = \lim\limits_{h \to 0} \left[\dfrac{2}{h^2 - h} \right] \\ \lim\limits_{h \to 0} f(2-h) & \rightarrow & -\infty \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \lim\limits_{h \to 0} f(2+h) & = & \lim\limits_{h \to 0} \left[\dfrac{2}{(2+h)^2 - 3(2+h) + 2} \right] = \lim\limits_{h \to 0} \left[\dfrac{2}{h^2 + h} \right] \\ \lim\limits_{h \to 0} f(2+h) & \rightarrow & +\infty \end{array}$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \to +\infty$:
Da der Exponent von x im Nenner höher ist als im Zähler, bestimmt der Nenner das Verhalten.

$$\underline{\underline{\lim_{x\to\infty} f(x) \to 0}}$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \to -\infty$:

$$\underline{\underline{\lim_{x\to-\infty} f(x) \to 0}}$$

7. Zerlegung des Zählers in Linearfaktoren:

$\rightarrow$ Durch Raten: $x_{N1} = 1$
$\rightarrow$ $(x^3 - x^2 + 5x - 5) : (x - 1) = x^2 + 5$
$\rightarrow$ Da $x^2 + 5 = 0$ keine Lösungen gibt es keine weiteren Nullstellen

Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren:

$\rightarrow$ Durch Raten: $x_{P1} = 1$
$\rightarrow$ $(x^3 - x^2 + x - 1) : (x - 1) = x^2 + 1$
$\rightarrow$ Da $x^2 + 1 = 0$ keine Lösungen gibt es keine weiteren Polstellen

Mit den Linearfaktoren kann die Funktion umgeschrieben werden:

$$f(x) = \frac{(x-1)\cdot(x^2+5)}{(x-1)\cdot(x^2+1)}$$

Somit lautet der maximale Definitionsbereich:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}_{max} = \mathbf{R}\backslash\{1\}}}$$

Man erkennt, dass der Linearfaktor $(x-1)$ sowohl im Zähler, als auch im Nenner vorkommt. Damit handelt es sich um eine $\underline{\underline{\text{behebbare Definitionslücke bei } x_L = 1}}$!
Verhalten bei $x_{P1} = 1$:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to0} f(1-h) &= \lim_{h\to0}\left[\frac{(1-h)^3-(1-h)^2+5(1-h)-5}{(1-h)^3-(1-h)^2+(1-h)-1}\right] = \lim_{h\to0}\left[\frac{-h^3+2h^2-6h}{-h^3+2h^2-2h}\right]\\
&\quad \text{Für } h\to0 \text{ erhält man: } \frac{0}{0}\\
&\quad \text{Aber: man kann } h \text{ herauskürzen:}\\
\lim_{h\to0} f(1-h) &= \lim_{h\to0}\left[\frac{-h^2+2h-6}{-h^2+2h-2}\right]\\
\lim_{h\to0} f(1-h) &\to 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to0} f(1+h) &= \lim_{h\to0}\left[\frac{(1-h)^3-(1+h)^2+5(1+h)-5}{(1+h)^3-(1+h)^2+(1+h)-1}\right] = \lim_{h\to0}\left[\frac{h^3+2h^2+6h}{h^3+2h^2+2h}\right]\\
&\quad \text{Für } h\to0 \text{ erhält man: } \frac{0}{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Aber: man kann } h \text{ herauskürzen:} \\ \lim_{h\to 0} f(1-h) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{h^2+2h+6}{h^2+2h+2}\right] \\ \lim_{h\to 0} f(1-h) &\to 3 \end{aligned}$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \to +\infty$:
Zunächst ist das Verhalten nicht direkt ablesbar, deshalb wird der Zähler und der Nenner durch die Variable mit höchsten Exponenten (hier: x^3) geteilt. Damit erhält man:

$$f^* = \frac{1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}$$

Nun ist erkennbar, dass die Brüche im Zähler und im Nenner für $x \to \infty$ gegen Null gehen. Somit erhält man:

$$\underline{\underline{\lim_{x\to\infty} f(x) \to 1}}$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \to -\infty$:

$$\underline{\underline{\lim_{x\to-\infty} f(x) \to 1}}$$

6 Stetigkeit

Ein Kennzeichen stetiger Funktionen ist es, dass ihre Graphen (evtl. auch nur in Intervallen) nicht „abreißen“ und gezeichnet werden können, ohne den Zeichenstift abzuheben. Bei stetigen Funktionen können aber durchaus „Knicke“ im Funktionsgraphen auftreten.

6.1 Stetigkeit an einer bestimmten Stelle

Eine Funktion $f : x \mapsto f(x)$ mit $x \in \mathbf{D}_f$ heißt an einer Stelle x_0 aus $\mathbf{D}_f$ stetig, wenn der Grenzwert der Funktionswerte an der Stelle x_0 mit dem an der Stelle x_0 erklärten Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmt, also

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h\to 0} f(x_0 - h) = f(x_0)$$

$$\text{bzw.} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Beispiele:

- Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = x^3 + 2x, \quad \mathbf{D} = \mathbf{R}$ auf Stetigkeit an der Stelle $x_0 = 4$.

  1. Berechnung des Funktionswertes an der Stelle $x_0 = 4$.

  $$\begin{aligned} f(4) &= 4^3 + 2 \cdot 4 \\ f(4) &= 72 \end{aligned}$$

  2. Berechnung des rechtsseitigen Grenzwertes zum Funktionswert an der Stelle $x_0 = 4$.

  $$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(4+h) &= \lim_{h\to 0} f(x_0 + h) \\ &= \lim_{h\to 0} (4+h)^3 + 2 \cdot (4+h) \\ &= \lim_{h\to 0} h^3 + 12h^2 + 50h + 72 \\ &= 72 \end{aligned}$$

  3. Berechnung des linksseitigen Grenzwertes zum Funktionswert an der Stelle $x_0 = 4$.

  $$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(4-h) &= \lim_{h\to 0} f(x_0 - h) \\ &= \lim_{h\to 0} (4-h)^3 + 2 \cdot (4-h) \\ &= \lim_{h\to 0} -h^3 + 12h^2 - 50h + 72 \\ &= 72 \end{aligned}$$

4. Ergebnis: An der Stelle $x_0 = 4$ gilt

$$\lim_{h\to 0} f(4+h) = \lim_{h\to 0} f(4-h) = f(4) = 72$$

$$\text{bzw.} \quad \lim_{x\to 4} f(x) = f(4) = 72$$

In Worten ausgedrückt: An der Stelle $x_0 = 4$ stimmen der rechtsseitige und der linksseitige Grenzwert zum Funktionswert mit dem an dieser Stelle errechneten Funktionswert überein. Somit ist die Funktion an der Stelle $x_0 = 4$ stetig.

- Untersuchen Sie die Funktion $f_a(x)$ an der Nahtstelle auf Stetigkeit.

$$f_a(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 1 & \text{für } x \leq 2 \\ ax + 5 & \text{für } x > 2,\ a \in \mathbf{R} \end{cases}$$

1. Funktionswert an der Nahtstelle $x_0 = 2$ berechnen:

$$\begin{aligned} f_a(x_0) &= 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 \\ f_a(x_0) &= 13 \end{aligned}$$

2. Linksseitigen Grenzwert zu x_0 ermitteln:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(2-h) &= \lim_{h\to 0}[(2-h)^2 + 4(2-h) + 1] \\ &= \lim_{h\to 0}[4 - 2h + h^2 + 8 - 4h + 1] \\ &= 13 \end{aligned}$$

3. Rechtsseitigen Grenzwert zu x_0 bestimmen:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(2+h) &= \lim_{h\to 0}[a(2+h) + 5] \\ &= \lim_{h\to 0}[2a + ah + 5] \\ &= 2a + 5 \end{aligned}$$

4. Soll die Funktion an der Stelle x_0 stetig sein, so muss der Funktionswert sowohl mit dem rechtsseitigen, als auch mit dem linksseitigen Grenzwert übereinstimmen.
Der Funktionswert stimmt bereits mit dem linksseitigen Grenzwert überein, aber für den rechtsseitigen muss gelten:

$$\begin{aligned} 2a + 5 &= 13 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Funktion ist an der Stelle $x_0 = 2$ nur für $a = 4$ stetig.

6.2 Stetigkeit einer ganzrationalen Funktion

Soll nun untersucht werden ob eine Funktion nicht nur an einer bestimmten Stelle stetig ist, sondern im ganzen Definitionsbereich, so muss die Funktion für alle erlaubten x-Werte untersucht werden.

Da dies nicht möglich ist wird ein beliebiger, aber allgemeiner x-Wert $x_0 \in \mathbf{D}$ ausgewählt, und der Nachweis mit ihm geführt.

Beispiele:

- $f(x) = 6x^3 - 2 \cdot (x+4)^2$

  Berechnung des Funktionswertes an der Stelle x_0:

  $$\begin{aligned} f(x_0) &= 6x_0^3 - 2 \cdot (x_0+4)^2 \\ &= 6x_0^3 - 2x_0^2 - 16x_0 - 32 \end{aligned}$$

  Berechnung des linksseitigen Grenzwertes der Funktion an der Stelle x_0:

  $$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(x_0 - h) &= \lim_{h\to 0} [6(x_0-h)^3 - 2 \cdot ((x_0-h)+4)^2] \\ &= \lim_{h\to 0} [6x_0^3 - 2x_0^2 + (4h-16)x_0 - 6h^3 - 2h^2 + 16h - 32] \\ &= 6x_0^3 - 2x_0^2 - 16x_0 - 32 \end{aligned}$$

  Berechnung des rechtsseitigen Grenzwertes der Funktion an der Stelle x_0:

  $$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(x_0 + h) &= \lim_{h\to 0} [6(x_0+h)^3 - 2 \cdot ((x_0+h)+4)^2] \\ &= \lim_{h\to 0} [6x_0^3 - 2x_0^2 + (-4h-16)x_0 + 6h^3 - 2h^2 + 16h - 32] \\ &= 6x_0^3 - 2x_0^2 - 16x_0 - 32 \end{aligned}$$

  Der links- und der rechtsseitige Grenzwert stimmen mit dem Funktionswert an der allgemeinen Stelle x_0 überein. Damit ist die Funktion an der Stelle x_0 stetig. Da x_0 für einen beliebigen Wert aus der Definitionsmenge steht, ist die Funktion in ganz **D** stetig.

- $x \mapsto f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 + 2 & \text{für } x \leq -4 \\ 0,5 \cdot |x| & \text{für } x > -4 \end{cases}$

  Um die Funktion auf Stetigkeit untersuchen zu können muss zunächst der Betrag aufgelöst werden:

  $$x \mapsto f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 + 2 & \text{für } x \leq -4 \\ 0,5 \cdot (-x) & \text{für } -4 < x \leq 0 \\ 0,5 \cdot x & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

  Nun muss für beide Nahtstellen ($x_1 = -4$ und $x_2 = 0$) eine Untersuchung auf Stetigkeit erfolgen. Also: jeweils links- und rechtsseitigen Grenzwert, sowie den Funktionswert an der Nahtstelle berechnen. Stimmen alle drei überein ist die Funktion an dieser Stelle stetig.
  Hinweis: Diese Funktion ist komplett stetig.

- $f_k(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 - x + 1 & \text{für } x < 2 \\ -\frac{1}{4} \cdot kx^2 + \frac{1}{2}(k^2+1) \cdot x & \text{für } x \geq 2, \quad k \in \mathbf{R}^+ \end{cases}$

  Man erhält zunächst als mögliche Ergebnisse $k = -1$ und $k = 2$. Da laut Definitionsbereich jedoch $k \in \mathbf{R}^+$ gilt, ist $f_k(x)$ nur für $k = 2$ an der Stelle $x_0 = 2$ und damit in ganz $\mathbf{R}$ stetig.

- $f(x) = x \cdot |x - 3|$

  Zunächst muss die Funktion aufgeteilt werden:

  $$f(x) = \begin{cases} x \cdot (-1) \cdot (x-3) & \text{für } x < 3 \\ x \cdot (x-3) & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$$

  Die Funktion ist an der Stelle $x_0 = 3$ und damit in ganz $\mathbf{R}$ stetig.

6.3 Stetigkeit aller ganzrationaler Funktionen

Wird aus zwei stetigen Funktionen eine Summe, Differenz oder ein Produkt gebildet, so ist das Ergebnis in der gemeinsamen Definitionsmenge wieder stetig. Der Quotient zweier stetiger Funktionen ist in der Definitionsmenge des Quotienten eine stetige Funkion.

Sind die Funktionen f in $\mathbf{D}_f$ und g in $\mathbf{D}_g$ stetig, so gilt:

$$f + g, \quad f - g \quad \text{und} \quad f \cdot g \quad \text{sind stetig in } \mathbf{D}_f \cap \mathbf{D}_g$$

$$\frac{f}{g} \text{ ist stetig in } \mathbf{D}_f \cap (\mathbf{D}_g \backslash \{x | g(x) = 0\})$$

Die konstante Funktion $f : x \mapsto r, \quad \mathbf{D}_f = \mathbf{R}$ und die lineare Funktion $g : x \mapsto x, \quad \mathbf{D}_g = \mathbf{R}$ sind stetig in $\mathbf{R}$. Beweis:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= r \\ \lim_{h \to 0} f(x_0 - h) &= \lim_{h \to 0}(r) = r \\ \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) &= \lim_{h \to 0}(r) = r \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g(x_0) &= x_0 \\ \lim_{h \to 0} g(x_0 - h) &= \lim_{h \to 0}(x_0 - h) = x_0 \\ \lim_{h \to 0} g(x_0 + h) &= \lim_{h \to 0}(x_0 + h) = x_0 \end{aligned}$$

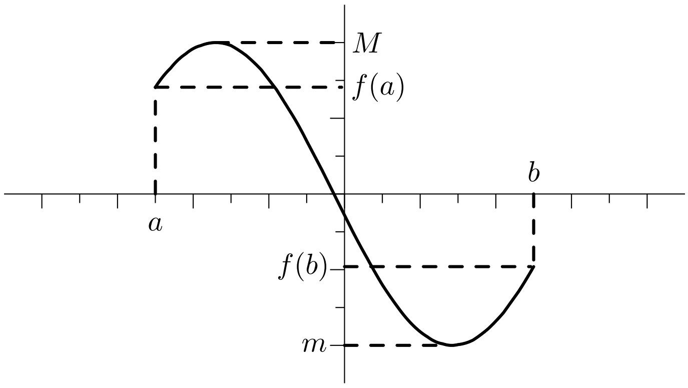
Da sämtliche ganzrationale Funktionen durch Verkettungen aus linearer und konstanter Funktion zusammengesetzt werden können gilt mit dem Satz dass Summen, Differenzen und Produkte von in $\mathbf{R}$ stetigen Funktionen wieder stetige Funktionen sind:

Jede ganzrationale Funktion

$$f : x \mapsto f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad \mathbf{D} = \mathbf{R}$$

ist in ganz $\mathbf{R}$ eine stetige Funktion.

6.4 Lehrsätze für stetige Funktionen



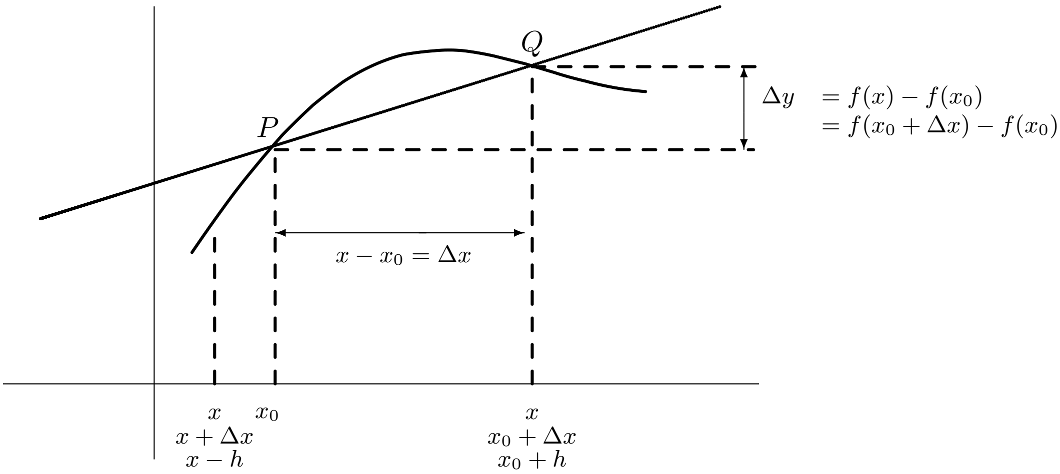
Extremwertsatz:
Eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetige und nichtkonstante Funktion ist dort beschränkt und besitzt einen kleinsten, wie auch einen größten Funktionswert.

Zwischenwertsatz:
Eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetige Funktion f nimmt jede zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gelegene reelle Zahl r mindestens einmal als Funktionswert an.

Nullstellensatz:
Eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetige Funktion f, die in den Randstellen a und b Funktionswerte mit verschiedenen Vorzeichen hat ($f(a) \cdot f(b) < 0$), hat im Inneren des Intervalls $[a; b]$ mindestens eine Nullstelle.
Es gilt: $f(c) = 0$ mit $a < c < b$.

7 Ableitung einer Funktion

7.1 Der Differenzenquotient



Soll ein Punkt x in unmittelbarer Umgebung von x_0 bezeichnet werden, so gibt es dafür drei Möglichkeiten:

- Man nennt die benachbarte Stelle x und legt fest, dass $x \neq x_0$. Der Nachteil dieser Methode ist, dass man nicht weiß ob x links oder rechts von x_0 liegt.
- Zur Stelle x_0 wird ein Zuwachs Δx angegeben der sowohl positiv, als auch negativ sein kann. Damit liegt $x = x_0 + \Delta x, \quad \Delta x < 0$ links von x_0, während $x = x_0 + \Delta x, \quad \Delta x > 0$ rechts von der bekannten Stelle liegt.
- Mit Hilfe der stets positiven Zahl h kann eine Stelle links von x_0 mit $x = x_0 - h$, eine Stelle rechts von x_0 dagegen mit $x_0 + h$ angegeben werden.

Interessiert nur die *absolute Änderung* der Funktionswerte sobald man sich etwas von x_0 entfernt, so kann die Gleichheit, Zunahme oder Abnahme der Funktionswerte durch Bildung der Differenz $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ untersucht werden.

Ist jedoch die *Stärke der Änderung* der Funktionswerte von Bedeutung, dann muss die Änderung der Funktionswerte Δy bezogen auf die zugehörige Änderung der x-Werte Δx betrachtet werden:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Für die Bildung des Differenzenquotienten (=**mittlere Änderungsrate**) der Funktion f bezüglich der Stelle x_0 gibt es also drei Möglichkeiten:

- Möglichkeit 1:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{mit} \quad x \neq x_0$$

- Möglichkeit 2:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad \text{mit} \quad \Delta x \neq 0$$

- Möglichkeit 3:

linksseitiger Differenzenquotient	rechtsseitiger Differenzenquotient
$\frac{\Delta y}{-h} = \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$	$\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

  Diese Möglichkeit muss immer dann angewendet werden wenn die Funktion $f(x)$ auf der linken und rechten Seite von x_0 durch verschiedene Funktionsterme gegeben ist. Dies tritt z. B. bei abschnittsweise definierten Funktionen oder bei Betragsfunktionen auf.

Beispiele:

- Ermitteln Sie die links- und rechtsseitige mittlere Änderungsrate der Funktion $f(x) = x \cdot |x - 3|$ an der Stelle $x_0 = 3$.

  Zunächst muss der Betrag aufgelöst werden:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot (x-3) & \text{für } x \geq 3 \\ x \cdot (-1) \cdot (x-3) & \text{für } x < 3 \end{cases}$$

  Linksseitiger Differenzenquotient an der Stelle $x_0 = 3$:

$$\frac{f(3-h) - f(3)}{-h} = \frac{(3-h) \cdot (-1) \cdot (3-h-3) - 0}{-h} = \frac{(3-h) \cdot h}{-h} = \underline{\underline{-3 + h}}$$

  Rechtsseitiger Differenzenquotient an der Stelle $x_0 = 3$:

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h) \cdot (3+h-3) - 0}{h} = \frac{(3+h) \cdot h}{h} = \underline{\underline{3 + h}}$$

- Stellen Sie mit der h-Methode den links- und rechtsseitigen Differenzenquotient der Funktion $f(x) = x^2 + 3x - 4$ an der Stelle $x_0 = 5$ auf.

  Linksseitiger Differenzenquotient an der Stelle $x_0 = 5$:

$$\frac{f(5-h) - f(5)}{-h} = \frac{[(5-h)^2 + 3(5-h) - 4] - [5^2 + 3 \cdot 5 - 4]}{-h} = \frac{-h(-h+13)}{-h} = \underline{\underline{13 - h}}$$

  Rechtsseitiger Differenzenquotient an der Stelle $x_0 = 5$:

$$\frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \frac{(5+h)^2 + 3(5+h) - 4] - [5^2 + 3 \cdot 5 - 4]}{h} = \frac{h(h+13)}{h} = \underline{\underline{13 + h}}$$

- Gegeben ist die Weg-Zeit-Funktion einer linearen Bewegung mit

  $$s(t) = -5\frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 40\frac{m}{s} \cdot t$$

  Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$.
  $\rightarrow$ Man betrachtet den festen Zeitpunkt t_0 und den variablen Zeitpunkt t mit $t > t_0$. Vom Zeitpunkt t_0 bis t verstreicht also die Zeit $t - t_0 = \Delta t > 0$. In dieser Zeit wird die Strecke $\Delta s = s(t) - s(t_0)$ zurück gelegt.
  Der Differenzenquotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ (=mittlere Änderungsrate) beschreibt in diesem Fall die Änderung des Weges bezogen auf die dafür benötigte Zeit. In der Technik wird dies als mittlere Geschwindigkeit bezeichnet.

  $$\begin{aligned}
  \frac{\Delta s}{\Delta t} &= \frac{\left(-5\frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 40\frac{m}{s} \cdot t\right) - \left(-5\frac{m}{s^2} \cdot t_0^2 + 40\frac{m}{s} \cdot t_0\right)}{t - t_0} \\
  &= \frac{-5\frac{m}{s^2} \cdot (t^2 - t_0^2) + 40\frac{m}{s} \cdot (t - t_0)}{t - t_0} \\
  &= \frac{-5\frac{m}{s^2} \cdot (t - t_0)(t + t_0) + 40\frac{m}{s} \cdot (t - t_0)}{t - t_0} \\
  &= -5\frac{m}{s^2} \cdot (t + t_0) + 40\frac{m}{s}
  \end{aligned}$$

  Für die Zeitpunkte $t_0 = 2s$ und $t = 5s$ kann damit eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 5\frac{m}{s}$ berechnet werden.

7.2 Vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten

Im letzten Beispiel des vorangegangenen Abschnitts wurde die Durchschnittsgeschwindigkeit als mittlere Änderungsrate $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ berechnet.

Interessant ist nun was passiert, wenn die zwei Zeitpunkte t_0 und t immer weiter zusammen rücken. Hat der Differenzenquotient einen Grenzwert für $\Delta t \rightarrow 0$ (was gleichbedeutend mit $t \rightarrow t_0$ ist)?

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \left[-5\frac{m}{s^2} \cdot (t + t_0) + 40\frac{m}{s}\right] = -10\frac{m}{s^2} \cdot t_0 + 40\frac{m}{s}$$

Diesen Grenzwert können wir als die Momentangeschwindigkeit $v(t_0)$ der Bewegung zum Zeitpunkt t_0 auffassen:

$$v(t_0) = -10\frac{m}{s^2} \cdot t_0 + 40\frac{m}{s}$$

Zum Zeitpunkt $t_0 = 2s$ beträgt die Momentangeschwindigkeit demnach

$$v(2s) = -10\frac{m}{s^2} \cdot 2s + 40\frac{m}{s} = 20\frac{m}{s}$$

Der Grenzwert des Differenzenquotienten heißt **Differenzialquotient** oder **lokale Änderungsrate** der Funktion $s(t)$ an der Stelle t_0. In der Technik/Physik wird die lokale Änderungsrate einer Ort-Zeit-Funktion als Momentangeschwindigkeit bezeichnet.

Hat für die Funktion f mit $y = f(x)$ der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ einen Grenzwert für $\Delta x \to 0$ (also für $x \to x_0$), dann heißt dieser Grenzwert der Differenzialquotient von f an der Stelle x_0.

Er wird mit $\frac{dy}{dx}$ (lies: dy nach dx) bezeichnet:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Dabei ist $\frac{dy}{dx}$ nicht als Bruch aufzufassen! Es wird lediglich symbolisch der vollzogene Grenzübergang $\Delta x \to 0$ ausgedrückt.

Folgende Schreibweisen können bei der Berechnung des Differenzialquotienten gleichwertig verwendet werden:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

7.3 Die erste Ableitung als Differenzialquotient

In der Abbildung auf Seite 96 sei der Punkt P fest während der Punkt Q variabel auf dem Graphen liegt. Die Steigung der Sekante durch diese zwei Punkte entspricht der **mittleren Steigung** des Graphen zwischen P und Q. Damit kann auch der Steigungswinkel φ angegeben werden:

$$\tan \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Je weiter Q auf dem Graphen an P heran rückt, desto kleiner wird Δx. Dabei dreht sich die Sekante im Punkt P.

Existiert für $\Delta x \to 0$ der Grenzwert m des Differenzenquotienten, so heißt dies geometrisch interpretiert dass bei einer Annäherung von Q an P die zugehörigen Sekanten immer in dieselbe Grenzsekante mit der Steigung m in P übergeht.

Die Grenzsekante im Kurvenpunkt $P(x_0|f(x_0))$ einer Funktion f mit $y = f(x)$ mit der Steigung

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißt **Tangente** im Punkt P des Graphen von f.

Die Steigung des Graphen im Punkt P entspricht der Steigung der Tangente in diesem Punkt P.

Der Grenzwert des Differenzenquotienten wird auch mit $f'(x_0)$ (lies: f Strich an der Stelle x_0) bezeichnet und heißt **Differenzialquotient** oder **1. Ableitung** der Funktion f **an der Stelle** x_0.

Mit der bereits eingeführten Bezeichnung $\frac{dy}{dx}$ für den Differenzialquotienten gilt:

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Eine Funktion f heißt an der Stelle $x_0 \in \mathbf{D}_f$ **differenzierbar**, wenn der Differenzenquotient von f an der Stelle x_0 für $x \to x_0$ einen Grenzwert hat.

Fazit: Die 1. Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangenten im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ an den Graphen von f und entspricht der Steigung des Graphen an dieser Stelle.

7.4 Aufstellen der Tangentengleichung in $\mathbf{P(x_0|f(x_0))}$

Da eine Tangente stets eine Gerade ist lautet ihre allgemeine Form $y = m \cdot x + t$.

- Wie im vorherigen Abschnitt erarbeitet wird die Steigung der Tangenten im Punkt x_0 auch mit $f'(x_0)$ bezeichnet. Damit erhält man für die Tangente die Gleichung:

$$y = f'(x_0) \cdot x + t$$

- Da die Tangente den Graphen im Punkt x_0 berührt ist der Punkt $P(x_0|f(x_0))$ sicher ein Punkt der Tangente. Somit müssen seine Koordinaten die Tangentengleichung erfüllen:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + t$$

- Mit Hilfe dieses Ansatzes kann der y-Abschnitt der Tangentengleichung ermittelt werden:

$$t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

- Nun kann die Gleichung der Tangente aufgestellt werden:

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

- Durch Umstellen und Ausklammern erhält man die Form der Tangentengleichung wie sie auch in der Formelsammlung zu finden ist:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Beispiele:

- Gegeben sei die Funktion $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 9x - 2$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten im Punkt $P(2|16)$.

  Zunächst wird der Differenzenquotient an der Stelle $x_0 = 2$ aufgestellt und sein Grenzwert berechnet:

$$\begin{aligned} m = f'(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(2x^3 - 4x^2 + 9x - 2) - (2\cdot 2^3 - 4\cdot 2^2 + 9\cdot 2 - 2)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{2x^3 - 4x^2 + 9x - 18}{x-2} \end{aligned}$$

  Beim Versuch diesen Grenzwert durch einsetzen von $x = 2$ zu lösen erkennt man, dass man einen Ausdruck der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erhält. Führt man im Zähler jedoch eine Faktorzerlegung durch, so erkennt man, dass der Nennerterm auch ein Linearfaktor des Zählers ist:

$$\begin{aligned} m = f'(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{(2x^2 + 9)\cdot(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} 2x^2 + 9 \\ &= 17 \end{aligned}$$

  Mit Hilfe der errechneten Steigung $m = 17$ im Punkt P und den Koordinaten des Punktes P kann nun der y-Abschnitt der Tangentengleichung berechnet werden:

$$\begin{aligned} y &= 17\cdot x + t \\ 16 &= 17\cdot 2 + t \\ t &= -18 \end{aligned}$$

  Damit lautet die Gleichung der Tangente an $f(x)$ im Punkt $P(2|16)$:

$$y = 17\cdot x - 18$$

- Gegeben sei erneut die Funktion $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 9x - 2$. Berechnen Sie die Steigung der Tangente in einem beliebigen Punkt $P(x_0|f(x_0))$.

  Zur Berechnung der Steigung eignen sich zwei Methoden:
  Entweder:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(x_0 + \Delta x)^3 - 4(x_0 + \Delta x)^2 + 9(x_0 + \Delta x) - 2] - [2x_0^3 - 4x_0^2 + 9x_0 - 2]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x_0^2 \Delta x + 6x_0(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 8x_0 \Delta x - 4(\Delta x)^2 + 9\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 6x_0^2 + 6x_0 \Delta x + 2(\Delta x)^2 - 8x_0 - 4\Delta x + 9 \\
&= 6x_0^2 - 8x_0 + 9
\end{aligned}$$

  Oder:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(2x^3 - 4x^2 + 9x - 2) - (2x_0^3 - 4x_0^2 + 9x_0 - 2)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{2(x^3 - x_0^3) - 4(x^2 - x_0^2) + 9(x - x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{2(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2) - 4(x - x_0)(x + x_0) + 9(x - x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} 2(x^2 + xx_0 + x_0^2) - 4(x + x_0) + 9 \\
&= 6x_0^2 - 8x_0 + 9
\end{aligned}$$

  Damit hat man eine Gleichung für die Steigung der Tangente an jeder beliebigen Stelle x_0 der Funktion $f(x)$.

  Für die Stelle $x_0 = 2$ erhält man damit die Steigung der Tangenten $m = f'(2) = 17$.

  Um auch die Gleichung der Tangenten angeben zu können muss nun noch der y-Wert der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 2$ berechnet werden: $f(2) = 16$.

  Mit den Koordinaten des Punktes $P(2|16)$ und der Steigung der Tangenten kann nun die Tangentengleichung ermittelt werden:

$$\begin{aligned}
y &= 17 \cdot x + t \\
16 &= 17 \cdot 2 + t \\
t &= -18
\end{aligned}$$

  Damit lautet die Gleichung der Tangente an $f(x)$ im Punkt $P(2|16)$:

$$\underline{\underline{y = 17 \cdot x - 18}}$$

7.5 Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Die Unterscheidung zwischen den Begriffen „Differenzierbarkeit“ und „Stetigkeit“ ist sehr wichtig. Darum noch einmal:

Ist eine Funktion stetig, so kann ihr Graph ohne absetzen des Stiftes gezeichnet werden. Der Verlauf des Graphen kann jedoch durchaus Knicke aufweisen. Sobald eine Funktion differenzierbar ist hat ihr Graph einen glatten Verlauf. Das heißt es existiert für jeden Punkt des Graphen eine eindeutige Tangente.

Der folgende, nicht umkehrbare Satz gibt den Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit wider:

Ist eine Funktion f an einer inneren Stelle $x_0 \in \mathbf{D_f}$ differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

Beispiele:

- Gegeben sei die Funktion $f(x) = |x-2| + 1 \qquad \mathbf{D} = \mathbf{R}$.
  Untersuchen Sie diese Funktion auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

  Zunächst muss der Betrag aufgelöst werden:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{für } x \geq 2 \\ -x+3 & \text{für } x < 2 \end{cases}$$

  $\rightarrow$ Stetigkeit:
  Da es sich bei jeder der beiden Funktionen um eine ganzrationale Funktion handelt sind sie für sich genommen sicher stetig. Interressant ist die Nahtstelle $x_0 = 2$.
  Linksseitiger Grenzwert:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(2-h) &= \lim_{h\to 0} -(2-h)+3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

  Rechtsseitiger Grenzwert:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(2+h) &= \lim_{h\to 0} (2+h)-1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

  Funktionswert an der Nahtstelle $x_0 = 2$:

$$\begin{aligned} f(2) &= 2-1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

  Linksseiter und rechtsseitiger Grenzwert stimmen mit dem Funktionswert an der Stelle $x_0 = 2$ überein. Damit ist die Funktion stetig.

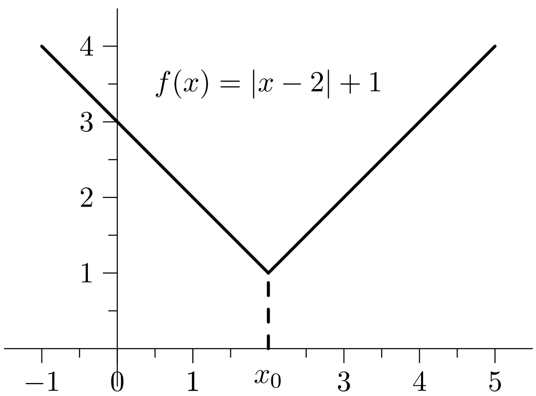
→Differenzierbarkeit:
Es muss untersucht werden ob die Grenzwerte des links- und rechtsseigen Differenzenquotienten übereinstimmen. D. h. ob man - unabhängig davon ob man sich von links oder rechts der Nahtstelle annähert - die gleiche Grenzsekante (=Tangente) im Punkt $x_0 = 2$ erhält.
Linksseitige Ableitung:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(2-h)+3-1}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{-h} = -1$$

Rechtsseitige Ableitung:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)-1-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Links- und rechtsseitige Ableitung stimmen nicht überein, d. h. die Steigung der Tangente an der Nahtstelle hängt davon ab ob man sich dieser von links oder von rechts annähert. Damit ist die Funktion an der Nahtstelle $x_0 = 2$ nicht differenzierbar.



- Untersuchen Sie nachfolgende Funktion auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 7,75x + 11 & \text{für } x \leq -1,5 \\ x^3 - 2x + 2 & \text{für } x > -1,5 \end{cases}$$

→ $f(x)$ ist stetig und differenzierbar.

- Untersuchen Sie nachfolgende Funktion auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{für } x \leq 1 \\ -x + 4 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Stetigkeit:

$$\lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0} (1-h)^2 + 2 = \lim_{h\to 0} 3 - 2h + h^2 = 3$$

$$\lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0} -(1+h) + 4 = \lim_{h\to 0} -1 - h + 4 = 3$$

$$f(1) = 3$$

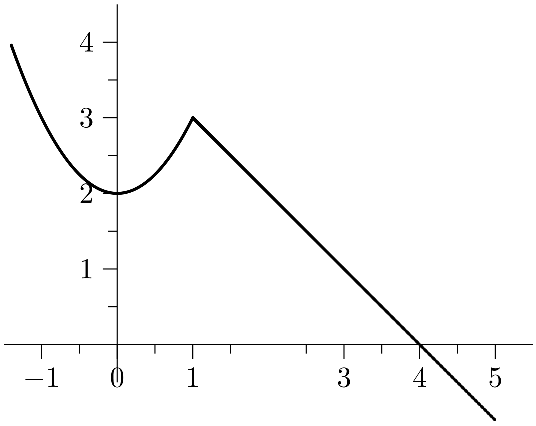
$$\rightarrow f(1-h) = f(1+h) = f(1) \qquad \rightarrow \qquad f \text{ ist stetig.}$$

$\rightarrow$ Differenzierbarkeit:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(1-h)^2 + 2 - (1^2 + 2)}{-h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1 - 2h + h^2 + 2 - 3}{-h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-2h + h^2}{-h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h(2-h)}{-h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2-h) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{-(1+h) + 4 - (1^2 + 2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1 - h + 4 - 3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Die links- und rechtsseitige Ableitung stimmen an der Stelle $x_0 = 1$ nicht überein. Deshalb ist die Funktion an dieser Stelle nicht differenzierbar.



- Untersuchen Sie nachfolgende Funktion auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit:
$$g(x) = \begin{cases} -0,5 \cdot (x+1)^2 + 3 & \text{für } x < 0 \\ 0,5x^2 - x + 2,5 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$
$\rightarrow g(x)$ ist stetig und differenzierbar.

- Untersuchen Sie nachfolgende Funktion auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit:
$$h(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-2} & \text{für } x > 1 \\ -3x + 1 & \text{für } x \leq 1 \end{cases}$$
$\rightarrow h(x)$ ist nicht stetig bei $x_0 = 2$ und deshalb auch nicht differenzierbar. Wird $\mathbf{D}$ eingeschränkt (z. B. auf $\mathbf{D} =]-\infty; 2[$), dann ist $h(x)$ stetig und differenzierbar.

7.6 Ableitungsregeln

Hausaufgabe:
Untersuchen Sie nachfolgende Funktionen auf Differenzierbarkeit.

a) $f(x) = 3$
b) $g(x) = 7x$
c) $h(x) = 2x^2 - 3x$
d) $f(x) = x^3 + 9x^2 - 4$
e) $g(x) = -4x + 2$
f) $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 3$
g) $f(x) = -x^3 - 7x + 1$

Die gestellten Aufgaben werden direkt den Lösungen gegenübergestellt:

$f(x)$	$y = 3$	$y = 7x^1$	$y = 2x^2 - 3x^1$	$y = x^3 + 9x^2 - 4$
$f'(x)$	$y = 3 \cdot 0$	$y = 7 \cdot 1 \cdot x^0$	$y = 2 \cdot 2 \cdot x^1 - 3 \cdot 1 \cdot x^0$	$y = 1 \cdot 3x^2 + 9 \cdot 2x^1 + 0$
$f'(x)$	$y = 0$	$y = 7$	$y = 4x - 3$	$y = 3x^2 + 18x$

$f(x)$	$y = -4x + 2$	$y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 3$	$y = -x^3 - 7x + 1$
$f'(x)$	$y = -4 \cdot 1x^0 + 0$	$y = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^1 + 4 \cdot 1 \cdot x^0 + 0$	$y = -1 \cdot 3 \cdot x^2 - 7 \cdot x^0 + 0$
$f'(x)$	$y = -4x$	$y = x + 4$	$y = -3x^2 - 7$

Bei vorhergehenden Aufgaben scheint ein bestimmtes Vorgehensmuster zu existieren. Bevor daraus jedoch feste Regeln abgeleitet werden soll das vermutete Regelwerk allgemein bewiesen werden.

7.6.1 Ableitung der konstanten Funktion

Von der gegebenen konstanten Funktion $f(x) = c$ soll die erste Ableitung berechnet werden. Dazu wird zunächst der Differenzenquotient gebildet:
$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Da bereits der Differenzenquotient Null ist kann auch der Grenzwert nur den Wert Null annehmen.
→ Vergleiche Beispiel $f(x) = 3$.

7.6.2 Ableitung der Potenzfunktion

Gegeben sei nun die Potenzfunktion $f(x) = a \cdot x^n$, wobei n eine natürliche Zahl sei.

Um von dieser Funktion die erste Ableitung zu erhalten wird zunächst der Differenzenquotient an der Stelle x_0 berechnet und anschließend der Grenzwert für $x \to x_0$ gebildet.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \frac{ax^n - ax_0^n}{x-x_0} \\
&= a \cdot \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} \\
&= a \cdot \frac{(x-x_0)\cdot(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x-x_0} \\
&= a \cdot (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite stehen in der Klammer nun n Summanden. Bildet man den Grenzwert $x \to x_0$, so lautet jeder der Summanden x_0^{n-1}, so dass der Klammerausdruck zu $n \cdot x_0^{n-1}$ zusammengefasst werden kann. Die gesamte erste Ableitung lautet damit $f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$.
→ Vergleiche Beispiel $f(x) = 7x$

7.6.3 Ableitung einer Summe von Funktionen

Gegeben seien die beiden differenzierbaren Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ woraus die Funktion $f(x) = g(x) + h(x)$ gebildet wird. Gesucht ist die erste Ableitung der Summenfunktion $f(x)$.

Fall 1:
Die Funktion $h(x)$ sei eine konstante Funktion, z. B. $h(x) = c$.

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[g(x+\Delta x)+c] - [g(x)+c]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)+c-g(x)-c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} \\ &= g'(x) \end{aligned}$$

Die additive Konstante ohne freie Variable x ist beim Differenzieren also einfach entfallen.
→ Vergleiche Beispiel $g(x) = -4x + 2$.
Fall 2:
$g(x)$ und $h(x)$ seinen beides differenzierbare Funktionen.

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[g(x+\Delta x)+h(x+\Delta x] - [g(x)+h(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)+h(x+\Delta x)-g(x)-h(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Nach den Regeln der Grenzwertrechnung entspricht der Grenzwert einer Summe der Summe der einzelnen Grenzwerte aller Summanden. Damit kann man vorherige Gleichung weiter umformulieren:

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)+h(x+\Delta x)-g(x)-h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} \\ &= g'(x) + h'(x) \end{aligned}$$

→ Vergleiche Beispiel $h(x) = 2x^2 - 3x$.

7.6.4 Ableitung einer ganzrationalen Funktion

Ist eine ganzrationale Funktion gegeben die aus mehreren Gliedern besteht, so gilt selbstverständlich auch hier die Summenregel.

Gegeben sei die Funktion $f(x) = g(x) + h(x) + u(x) = g(x) + [h(x) + u(x)]$

Wird der Ausdruck $[h(x) + u(x)]$ durch $v(x)$ substituiert, so erhält man einen Ausdruck aus zwei Summanden. Dass dieser differenzierbar ist wurde im vorherigen Abschnitt 7.6.3 gezeigt.

$$f(x) = g(x) + v(x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad f'(x) &= g'(x) + v'(x) \\ &= g'(x) + [h(x) + u(x)]' \\ &= g'(x) + h'(x) + u'(x) \end{aligned}$$

Besteht eine Funktion aus Summen oder Differenzen, so wird jedes Glied einzeln differenziert.
→ Vergleiche Beispiel $f(x) = x^3 + 9x^2 - 4$.

Ableitungsregeln:

- Die konstante Funktion $f(x) = c$, $c \in \mathbf{R}$ hat die Ableitung Null.

$$f(x) = c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

- Die Ableitung einer Potenzfunktion erhält man, indem man das Produkt aus dem Vorfaktor (gegebenenfalls der Wert 1), der ursprünglichen Hochzahl n und der Potenzfunktion x^{n-1}, deren Hochzahl $n-1$ genau um 1 kleiner ist als die ursprüngliche Hochzahl n, berechnet.

$$f(x) = a \cdot x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

- Eine Summe oder Differenz von Funktionen wird gliedweise differenziert. Enthält die Summe oder Differenz eine additive bzw. subtraktive Konstante, so entfällt diese beim differenzieren.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) + c \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \\ f(x) = g(x) \pm h(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \pm h'(x) \end{aligned}$$

- Eine algebraische Summe bzw. Differenz wird gliedweise differenziert.

$$f(x) = g(x) + h(x) + u(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) + h'(x) + u'(x)$$

Übungsaufgaben:

Geben Sie jeweils die erste Ableitung der Funktion an.

1) $f(x) = 12$

2) $f(x) = 14x^4$

3) $f(x) = 2x + 9$

4) $f(x) = -16 - 3x^2$

5) $f(x) = x^5$

6) $f(x) = -x^7$

7) $f(x) = x^0$

8) $f(x) = 4x^5 + 2x^3$

9) $f(x) = -11x^2 + 2x$

10) $f(x) = x^8 - 3x^2 + 7x$

11) $f(x) = x^{-3}$

12) $f(x) = -4x^{-5}$

13) $f(x) = \frac{1}{x}$

14) $f(x) = \frac{8}{x^3}$

15) $f(x) = 6 \cdot \frac{2}{4x^5}$

16) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

17) $f(x) = 9x^{11} + 4x^8 - 9x^3 + 3x - 2$

18) $f(x) = -4x^9 - 3x^4 + 8$

19) $f(x) = x^{\sqrt{2}}$

20) $f(x) = -4 \cdot \frac{3}{x^{-7}}$

Lösungen:

1) $f'(x) = 0$

2) $f'(x) = 56x^3$

3) $f'(x) = 2$

4) $f'(x) = -6x$

5) $f'(x) = 5x^4$

6) $f'(x) = -7x^6$

7) $f'(x) = 0$

8) $f'(x) = 20x^4 + 6x^2$

9) $f'(x) = -22x + 2$

10) $f'(x) = 8x^7 - 6x + 7$

11) $f'(x) = -3x^{-4}$

12) $f'(x) = 20x^{-6} = \frac{20}{x^6}$

13) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

14) $f'(x) = -24x^{-4} = \frac{-24}{x^4}$

15) $f'(x) = -15 \cdot \frac{1}{x^6}$

16) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$

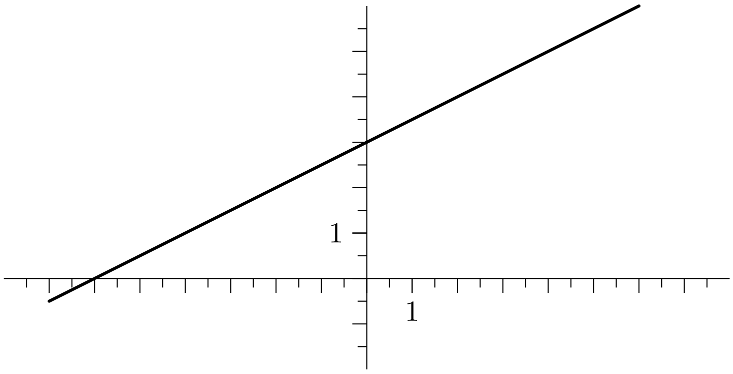
17) $f'(x) = 99x^{10} + 32x^7 - 27x^2 + 3$

18) $f'(x) = -36x^8 - 12x^3$

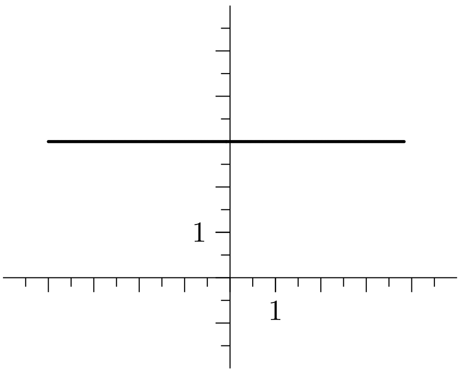
19) $f'(x) = \sqrt{2} \cdot x^{\sqrt{2}-1}$

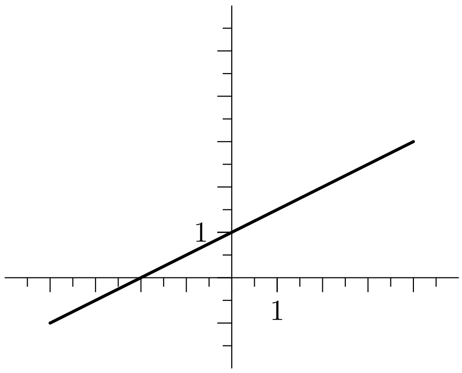
20) $f'(x) = -84 \cdot x^6$

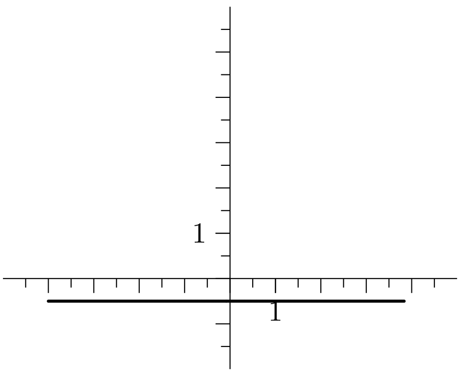
Gegeben ist folgender Graph der Funktion $f(x) = 0,5x + 3$:

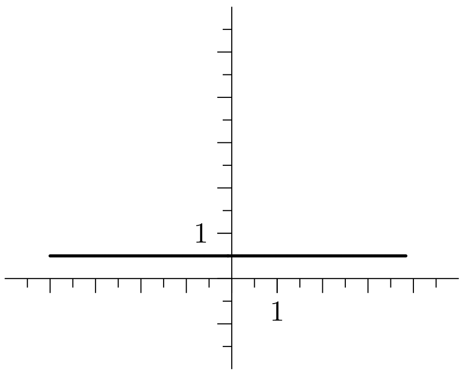


Entscheiden Sie, welcher der nachfolgenden Graphen die erste Ableitung zur oben gegebenen Funktion $f(x)$ darstellt.

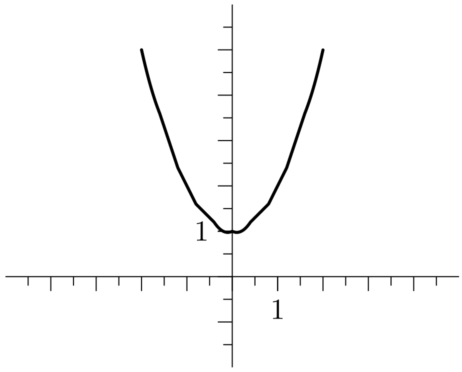




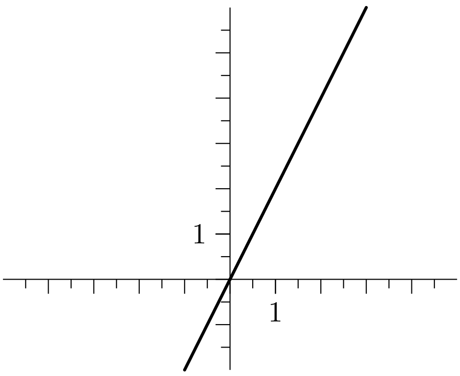


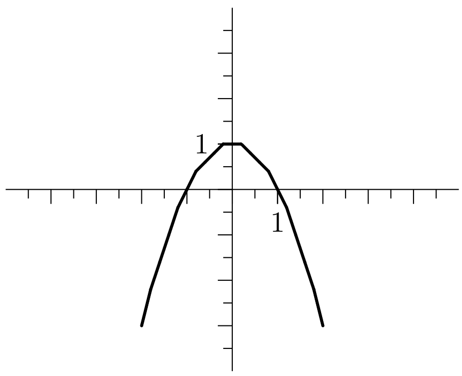


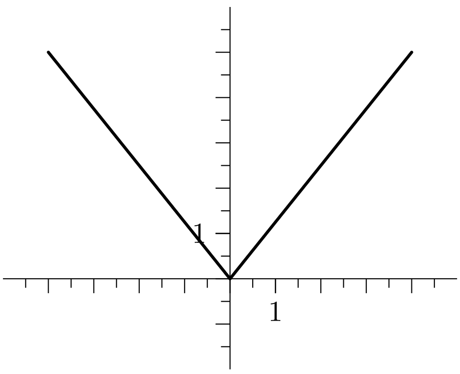
Gegeben ist folgender Graph der Funktion $f(x) = x^2 + 1$:

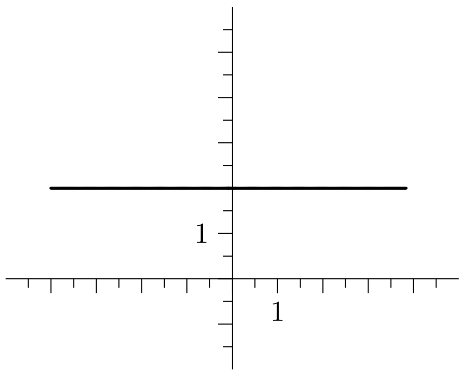


Entscheiden Sie, welcher der nachfolgenden Graphen die erste Ableitung zur oben gegebenen Funktion $f(x)$ darstellt.

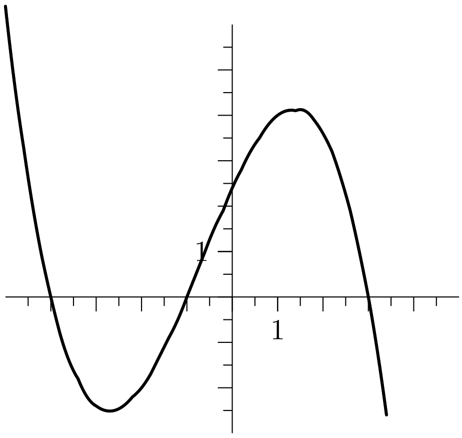




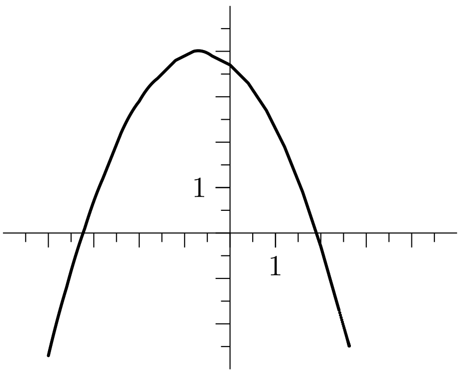


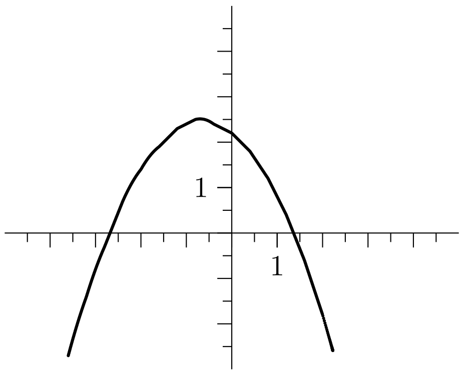


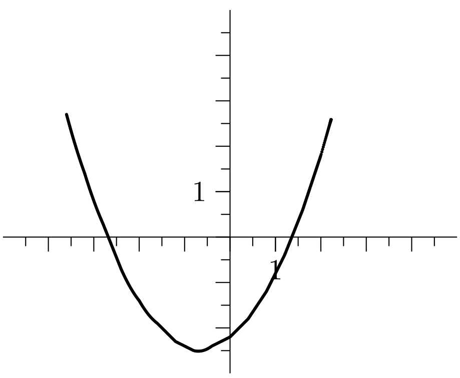
Gegeben ist folgender Graph der Funktion $f(x) = -0,2(x+4)(x+1)(x-3)$:

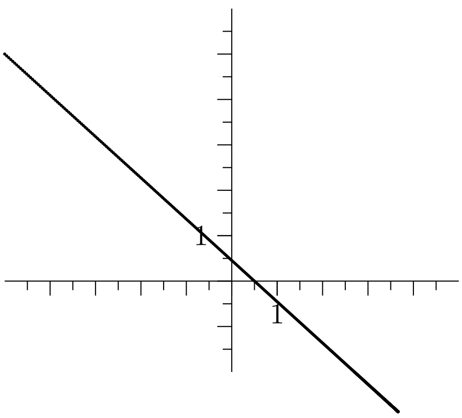


Entscheiden Sie, welcher der nachfolgenden Graphen die erste Ableitung zur oben gegebenen Funktion $f(x)$ darstellt.

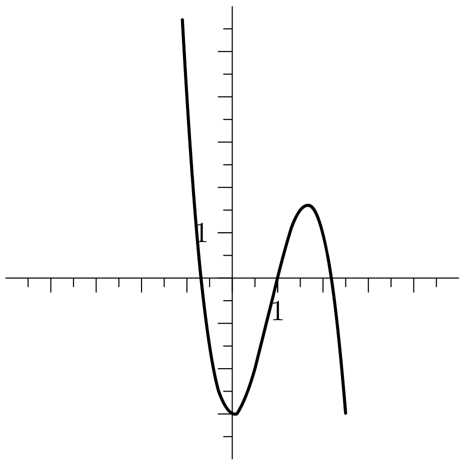




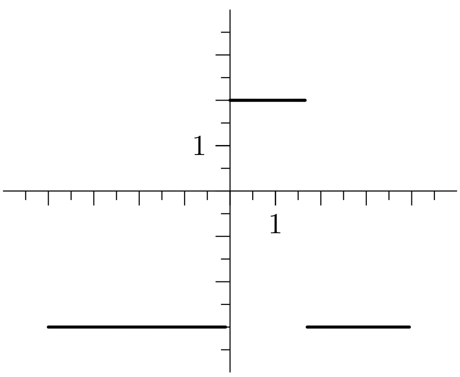


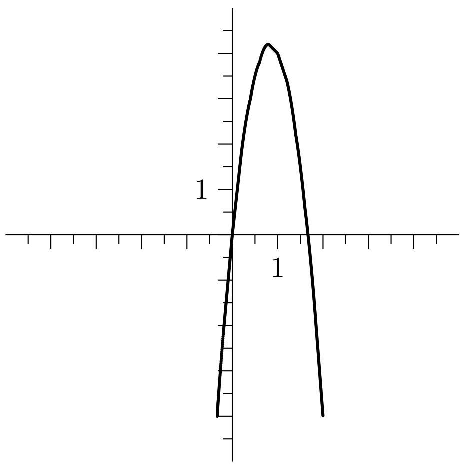


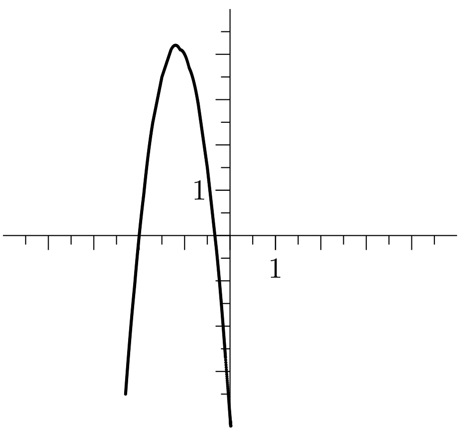
Gegeben ist folgender Graph der Funktion $f(x) = -2x^2 + 5x^2 - 3$:

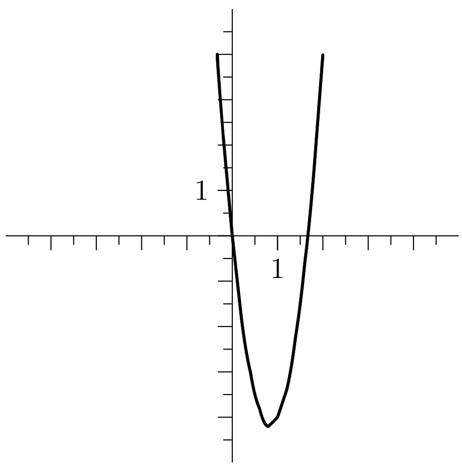


Entscheiden Sie, welcher der nachfolgenden Graphen die erste Ableitung zur oben gegebenen Funktion $f(x)$ darstellt.









7.7 Aufstellen der Normalengleichung in $\mathbf{P(x_0|f(x_0))}$

Die Normale auf den Graphen der Funktion $f(x)$ im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ ist eine Gerade, die auf dem Graphen der Funktion $f(x)$ im Punkt P senkrecht steht. Da es nicht möglich ist dass eine Gerade senkrecht auf einem Punkt steht behilft man sich damit, dass die Normale die Gerade ist, welche senkrecht auf der Tangente im Punkt P steht.

Um bei gegebenem Funktionsterm $f(x)$ die Gleichung der Normalen zu berechnen muss zunächst die Steigung der Tangente (also die erste Ableitung von $f(x)$) bestimmt werden.

Die Steigung der Normalen erhält man dann über den Zusammenhang:

$$m_{Normale} = -\frac{1}{m_{Tangente}}$$

Nun werden in die allgemeine Geradengleichung $y = mx + t$ neben der Steigung der Normalen die x- und y-Koordinaten des Punktes P eingesetzt durch welche die Normale verlaufen soll. Damit kann der y-Abschnitt t berechnet werden.

Nun kann die Gleichung der Normalen angegeben werden.

Beispiel:
Gegeben sei die Funktion $f(x) = -x^2 + 6x$. Gesucht ist die Gleichung der Normalen im Punkt $x_0 = 2$.

Berechnung der ersten Ableitung:

$$f'(x) = -2x + 6$$

Bestimmung der Tangentensteigung an der Stelle $x_0 = 2$:

$$m_{Tangente} = f'(2) = 2$$

Berechnen der Steigung der Normalen:

$$m_{Normale} = -\frac{1}{m_{Tangente}} = -\frac{1}{2}$$

Ermitteln der y-Koordinate des Punktes P:

$$y = f(2) = 8$$

Bestimmung des y-Abschnitts der Normalengleichung:

$$\begin{aligned} y &= mx + t \\ 8 &= -\frac{1}{2} \cdot 2 + t \\ t &= 9 \end{aligned}$$

Angeben der Normalengleichung:

$$y = -\frac{1}{2} \cdot x + 9$$

Übungsaufgaben:
(Jede Aufgabe auf einen eigenen Zettel drucken, einen Schüler einen Zettel ziehen lassen. Von dieser Aufgabe muss er die erste Ableitung berechnen, dann den nächsten Schüler bestimmen. Dieser darf die Gleichung der Tangente an der Stelle x_0 ermitteln und anschließend einen dritten Schüler bestimmen, der die Gleichung der Normalen an der Stelle x_0 ermitteln darf.
Graph der Funktion, Tangente und Normale mit Laptop/Beamer veranschaulichen.)

$$f(x) = 0,25x^4 - 3x^2 \qquad x_0 = 5$$

$$g(x) = 4 \cdot \frac{1}{x} \qquad x_0 = 4$$

$$h(x) = -x + \frac{1}{6 \cdot x^2} \qquad x_0 = -0,5$$

$$f(x) = x^{-2} \qquad x_0 = 0$$

$$g(x) = \sqrt{x} \qquad x_0 = -2$$

$$h(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad x_0 = 4$$

$$u(x) = \frac{1}{(\sqrt{(x)})^3} \qquad x_0 = 0,5$$

$$v(x) = 0,5x^{\frac{7}{3}} \qquad x_0 = 3$$

$$u(x) = 7k - 3 \qquad x_0 = -2$$

$$v(k) = 8x^3 - 2k \qquad k_0 = -2$$

$$s(t) = -5\frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 40\frac{m}{s} \cdot t + 10m \qquad t_0 = 2s,\ t_1 = 5s$$

Berechnung der ersten und der zweiten Ableitung!

7.8 Die physikalische Bedeutung der Ableitung

A **Zusammenhang zwischen Strecke, Geschwindigkeit und Beschleunigung**

Folgende Formel sollte aus der Physik bekannt sein (geradlinige Bewegung mit konstanter Beschleunigung):

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

Aufgabe:
Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung der Funktion $s(t)$ und überlegen Sie anhand der Einheiten welche physikalischen Größen mit diesen Ableitungen dargestellt werden.

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= s'(t) \\ &= \frac{ds(t)}{dt} \\ &= a \cdot t + v_0 \qquad \rightarrow \text{ =Geschwindigkeit} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{s}(t) &= s''(t) \\ &= v'(t) \\ &= \frac{dv(t)}{dt} \\ &= a \qquad \rightarrow \text{ =Beschleunigung} \end{aligned}$$

Gegeben sei die Weg-Zeit-Funktion $s(t) = 7\frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 11\frac{m}{s} \cdot t + 120m$ Bestimmen Sie wo sich der Körper zu den Zeitpunkten $t_1 = 2s$ und $t_2 = 10s$ befindet, welche Geschwindigkeit und welche Beschleunigung er dann jeweils hat.

$$\begin{aligned} s(t_1) &= 7\frac{m}{s^2} \cdot (2s)^2 + 11\frac{m}{s} \cdot 2s + 120m \\ &= 170m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(t_2) &= 7\frac{m}{s^2} \cdot (10s)^2 + 11\frac{m}{s} \cdot 10s + 120m \\ &= 930m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \dot{s}(t) \\ &= 14\frac{m}{s^2} \cdot t + 11\frac{m}{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(t_1) &= 14\frac{m}{s^2} \cdot 2s + 11\frac{m}{s} \\ &= 39\frac{m}{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(t_2) &= 14\frac{m}{s^2}\cdot 10s + 11\frac{m}{s} \\ &= 151\frac{m}{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(t) &= \ddot{s}(t) \\ &= \dot{v}(t) \\ &= 14\frac{m}{s^2} \\ a(t_1) &= 14\frac{m}{s^2} \\ a(t_2) &= 14\frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

B **Zusammenhang zwischen Kraftstoß und Impuls**
Der Impuls p wird aus der Masse eines Körpers und dessen Geschwindigkeit berechnet:

$$p = m \cdot v$$

Ändert sich der Impuls in einem bestimmten Zeitintervall so spricht man von einem Kraftstoß F:

$$F(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p(t)}{\Delta t} = \dot{p}(t)$$

Aufgabe:
Ein Schwimmer schafft es, beim Start folgenden Impuls von seinem Körper auf den Startblock zu übertragen: $p(t) = 80\,kg \cdot 0,6\frac{m}{s^2} \cdot t$ Berechnen Sie die Kraft, die er im Absprungmoment auf den Startblock bringt.

$$\begin{aligned} F(t) &= \dot{p}(t) = \frac{dp(t)}{dt} \\ &= 80\,kg \cdot 0,6\frac{m}{s^2} \\ &= 48\frac{kg\,m}{s^2} \\ &= 48N \end{aligned}$$

C **Zusammenhang zwischen Strom und Ladung**
Die elektrische Stromstärke I ist definiert als die Menge der Ladung Q, welche in einem bestimmten Zeitraum t durch den Leiter fließt.
Damit kann die Stromstärke folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} = Q'(t) = \dot{Q}(t)$$

Aufgabe:
Durch Messung wissen Sie die Menge an Ladung, die bis zu den Zeitpunkten $t_1 = 1s$, $t_2 = 5s$ und $t_3 = 20s$ durch einen elektrischen Leiter geflossen sind:

$$Q(t_1) = 7As \qquad Q(t_2) = 135As \qquad Q(t_3) = 2040As$$

Bestimmen sie die Stromstärke zu den Zeitpunkten $t_4 = 3s$ und $t_5 = 8s$.

Zunächst muss die Gleichung für $Q(t)$ aufgestellt werden. Da drei Punkte gegeben sind kann es sich maximal um eine Funktion 2.Grades handeln:

$$Q(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$$

Aufstellen der Gleichungen zu den gegebenen Zeitpunkten:

$$\begin{aligned} t_1: &\quad a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 = 7 \\ t_2: &\quad a_2 \cdot 5^2 + a_1 \cdot 5 + a_0 = 135 \\ t_3: &\quad a_2 \cdot 20^2 + a_1 \cdot 20 + a_0 = 2040 \end{aligned}$$

Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 25 & 5 & 1 & 135 \\ 400 & 20 & 1 & 2040 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -20 & -24 & -40 \\ 0 & -380 & -399 & -760 \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -20 & -24 & -40 \\ 0 & 0 & 57 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 5 \end{array} \right.$$

Damit lautet die Gleichung für die Ladung:

$$Q(t) = 5A \cdot t^2 + 2A \cdot t$$

Berechnung der Stromstärke:

$$\begin{aligned} I(t) &= \dot{Q}(t) \\ &= 10A \cdot t + 2A \\ \\ I(t_4) &= 32A \\ \\ I(t_5) &= 82A \end{aligned}$$

7.9 Monotonieverhalten

Von einer stetigen und differenzierbaren Funktion f sei bekannt dass die erste Ableitung positiv sei:

$$f'(x_0) > 0$$

Unter Einbeziehung der Herleitung der ersten Ableitung kann diese Aussage folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} > 0 \qquad \wedge \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0$$

Geht man davon aus dass h als sehr, sehr kleine, positive Zahl definiert wurde, so kann auf den Grenzübergang $h \to 0$ verzichtet werden. In genügend kleiner Umgebung von x_0 gelten auch folgende Zusammenhänge:

$$\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} > 0 \quad |\cdot(-h) \qquad \wedge \qquad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0 \quad |\cdot h$$

$$f(x_0-h)-f(x_0) < 0 \qquad \wedge \qquad f(x_0+h)-f(x_0) > 0$$

$$f(x_0-h) < f(x_0) \qquad \wedge \qquad f(x_0+h) > f(x_0)$$

$$f(x_0-h) < f(x_0) \qquad \wedge \qquad f(x_0) < f(x_0+h)$$

$$\to \quad f(x_0-h) < f(x_0) < f(x_0+h)$$

Interpretiert man die letzte Zeile so bedeutet dies folgendes: Je größer ein x-Wert ist ($x_0+h \quad \to \quad x_0 \quad \to \quad x_0+h$), desto größer ist auch der zugehörige Funktionswert.

Dieser Zusammenhang ist jedoch bereits aus Kapitel 2.5.3 „Monotone Funktionen“ (siehe Seite 22) bekannt. Er besagt nichts anderes als dass es sich hier um eine streng monoton steigende Funktion handelt.
Die Herleitung für eine streng monoton fallende Funktion erfolgt analog mit dem Ansatz $f'(x_0) < 0$.

Ist $f'(x_0) > 0$ (bzw. $f'(x_0) < 0$), dann ist die Funktion f bei Durchgang durch die Stelle x_0 streng monoton zunehmend (bzw. streng monoton abnehmend).

Ärgerlich ist nur, dass diese Aussage nur in unmittelbarer Umgebung von x_0 gültig ist. Wünschenswert wäre eine Aussage über den ganzen Definitionsbereich, oder wenigstens größerer Intervalle.

Dazu kann man jedoch eine weitere Eigenschaft der 1. Ableitung heranziehen. Sie entspricht ja auch der Steigung der Tangente im Punkt x_0. Da die Funktion stetig (d. h. man kann den Graph zeichnen ohne mit dem Stift abzusetzen) und differenzierbar (d. h. der Graph ist „glattgebügelt“, also ohne Knicke) ist kann sich die Steigung der Tangente im Punkt x_0 nicht allzu stark von der Steigung der Tangente im Punkt $x_0 + h$ unterscheiden.

Hat die Tangente im Punkt x_0 eine positive Steigung, so ist auch die Funktion f in unmittelbarer Umgebung von x_0 monoton steigend (analog für fallend).

Beispiel:
Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f(x) = x^3$.

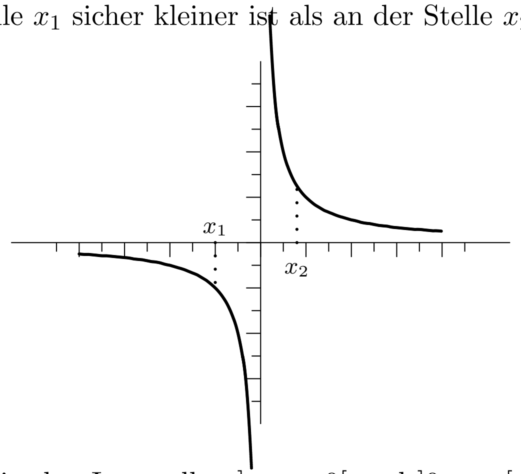
→ $f'(x) = 3x^2$
→ Durch das Quadrat im Exponent ist die Ableitung stets positiv.
→ $f(x)$ ist in ganz $\mathbf{R}$ streng monoton steigend.

Was ist jedoch mit $f'(0) = 0$? Da die erste Ableitung hier den Wert Null hat ist sie sicher nicht ansteigend!
→ Da es sich hierbei nur um einen einzelnen (Terrassen)Punkt handelt (und nicht um ein Intervall) gilt die Funktion in ihrer Gesamtheit weiter als streng monoton ansteigend.

> Ist die Funktion f in $[a; b]$ differenzierbar und ist $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$) für alle inneren Stellen des Intervalls, dann ist der Graph von f auf dem Intervall $[a; b]$ streng monoton steigend (bzw. fallend).

Aufgaben:

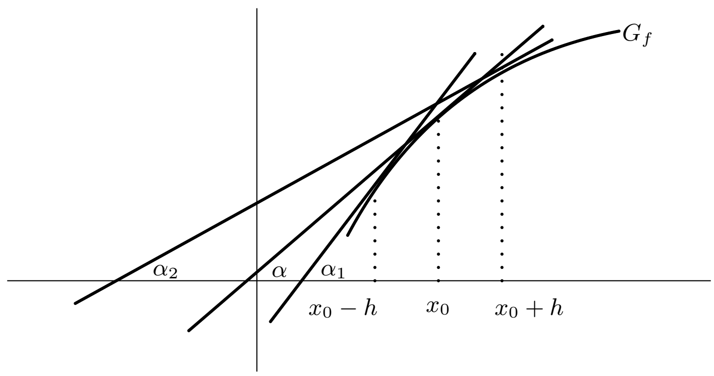
- Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auf Monotonie. → Erste Ableitung berechnen:
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{R}$$
→ Der Nenner kann nur positive Werte annehmen. Unter Berücksichtigung des Minuszeichens könnte man dann sagen dass $f(x)$ in ganz $\mathbf{D}$ streng monoton abnehmend ist. Das würde aber bedeuten, dass für zwei beliebige x-Werte gilt:
$$x_1 < x_2 \qquad \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$
Man erkennt bereits am Graph, dass dies nicht stimmt, da der Funktionswert an der Stelle x_1 sicher kleiner ist als an der Stelle x_2:



→ $f(x)$ ist nur in den Intervallen $]-\infty; 0[$ und $]0; +\infty[$ streng monoton fallend.

- Zur weiteren Übung können die Aufgaben von Seite 116 bzgl. Monotonie untersucht werden.

7.10 Krümmungsverhalten



Durchläuft man den Graph in Richtung ansteigender x-Werte, so bewegt man sich auf einer Rechtskurve. Der Graph wird deshalb *rechtsgekrümmt* oder *konvex* genannt. (Analog bezeichnet man einen Graphen der mit einer Linkskurve verläuft *linksgekrümmt* oder *konkav.*)

Wie kann dieses Verhalten mathematisch beschrieben werden?
Zunächst kann man die drei Tangenten betrachten und stellt dabei fest, dass der Winkel, den sie mit der x-Achse bilden, in Richtung größerer x-Werte zunimmt:

$$\alpha_1 > \alpha > \alpha_2$$

Für die Steigung der Tangenten gilt damit:

$$\tan\alpha_1 > \tan\alpha > \tan\alpha_2$$

oder anders ausgedrückt:

$$f'(x_0 - h) > f'(x_0) > f'(x_0 + h)$$

Die letzte Doppelungleichung beschreibt das Verhalten der Funktionswerte der ersten Ableitung f' in der Umgebung von x_0: Mit ansteigenden x-Werten nehmen die Funktionswerte ab. Das ist genau das Verhalten, welches im Kapitel 7.9 „Monotonieverhalten“ mit 'streng monoton abnehmend' bezeichnet wurde.

Da das Monotonieverhalten des Funktionsterms durch dessen 1. Ableitung beschrieben wird muss das Monotonieverhalten der ersten Ableitung eigentlich auch durch dessen 1. Ableitung beschreibbar sein. Vom Funktionsterm aus betrachtet ist die Ableitung der 1. Ableitung die 2. Ableitung f''.

Für das Krümmungsverhalten eines Graphen auf einem Intervall gilt damit:

Der Graph einer zweimal differenzierbaren Funktion f heißt in einem offenen Intervall

- rechtsgekrümmt (konvex), wenn dort $f''(x) < 0$, und
- linksgekrümmt (konkav), wenn dort $f''(x) > 0$, gilt.

Eselsbrücke: Das „<“ erinnert an die Rechtskurve ($<$ $\approx$ $\circlearrowright$), während das „>“ mit einer Linkskurve assoziierbar ist ($>$ $\approx$ $\circlearrowleft$).

Beispiele:

- Gesucht ist das Krümmungsverhalten der Funktion $f(x) = x^3$.

  $$f'(x) = 3x^2 \qquad\qquad f''(x) = 6x$$

  $$\rightarrow f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad 6x < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0$$

  Der Graph von f ist für $x < 0$ rechtsgekrümmt.

  $$\rightarrow f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad 6x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0$$

  Der Graph von f ist für $x > 0$ linksgekrümmt.

- Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion $f(x) = -x^4 - 6x^2 - 9$.

  $$f'(x) = -4x^3 - 12x \qquad\qquad f''(x) = -12x^2 - 12 = -12(x^2 + 1)$$

  Die zweite Ableitung ist stets kleiner Null. Die Funktion ist in ganz $\mathbf{R}$ rechtsgekrümmt.

7.11 Wendepunkte

In der Praxis kommt es recht häufig vor dass ein Graph nicht durchgehend rechts- oder linksgekrümmt ist, sondern beide Krümmungen beinhaltet. Dann muss es irgendwo einen Übergang von der Rechts- in die Linkskurve (oder eben umgekehrt) geben.

Da das Krümmungsverhalten mit dem Vorzeichen der zweiten Ableitung bestimmt wurde (siehe Kapitel 7.10) kann diese auch bei der Bestimmung der Wendepunkte herangezogen werden.

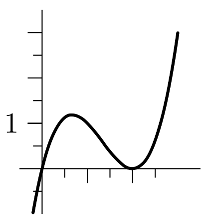
Eine innere Stelle x_w heißt Wendestelle, wenn die Werte der 2. Ableitung der Funktion $f(x)$ beim Überschreiten der Stelle x_w in Richtung ansteigender x-Werte einen Vorzeichenwechsel haben.

Ist die Funktion $f(x)$ dreimal differenzierbar, so gilt für Wendepunkte: $f''(x_w) = 0$ und $f'''(x_w) \neq 0$.

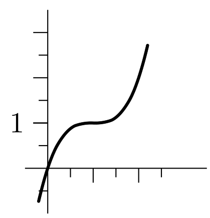
Der zugehörige Punkt wird Wendepunkt $W(x_w|f(x_w))$ genannt.

Ein Wendepunkt mit waagrechter Wendetangente heißt Terrassenpunkt oder Terrasse.

Wendepunkt



Terrassenpunkt



Beispiel:
Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = 2x^5$ auf einen Wende-/Terrassenpunkt.

1. Ableitung:
$$f'(x) = 10x^4$$

2. Ableitung:
$$f''(x) = 40x^3$$
$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x_w = 0$$

3. Ableitung:
$$f'''(x) = 120x^2$$

Dritte Ableitung ist an der Stelle $x_w = 0$ auch Null, deshalb ist eine Aussage, ob x_w eine Wendestelle der Funktion $f(x)$ ist nicht möglich.

Vorzeichenuntersuchtung der 2. Ableitung:

$$f''(0-h) = 40 \cdot (0-h)^3 = -40h^3 \quad \rightarrow \quad f''(0-h) < 0$$
$$f''(0+h) = 40 \cdot (0+h)^3 = 40h^3 \quad \rightarrow \quad f''(0-h) > 0$$

$\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel der 2. Ableitung bei $x_w = 0 \rightarrow$ Wendestelle.

Da bei $x_w = 0$ für die erste Ableitung $f(x_w) = 0$ gilt ist der Punkt $W(0|0)$ nicht nur Wende-, sondern sogar Terrassenpunkt.

7.12 Extremwerte

Ist eine Funktion nur in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definiert, so können verschiedene Arten von Extremwerten unterschieden werden:

- Es gibt *innere Stellen* des Intervalls $[a, b]$, bei denen die Funktion auf beiden Seiten dieser Stellen erklärt ist, und an den Stellen selbst einen extremalen, also größten oder kleinsten Funktionswert im Vergleich mit den benachbarten Funktionswerten einnimmt. Diese werden lokale Minima bzw. lokale Maxima genannt.
- An den Randstellen a und b der Definitionsmenge besitzt die Funktion ein Randmninimum (bzw. ein Randmaximum) falls der benachbarte Funktionswert größer (bzw. kleiner) ist. Es handelt sich hier nicht um lokale Extrema, da man sich den Randstellen stets nur von einer Seite nähern kann.

Lokale Extrema einer differenzierbaren Funktion können nur an den Stellen x vorliegen, die eine Lösung der Gleichung $f'(x) = 0$ sind.

Bedingung für lokale Extrempunkte:

Wenn die Funktion f zweimal differenzierbar ist gilt:

- $f'(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow$ lokaler Hochpunkt $H(x_0|f(x_0))$.
- $f'(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow$ lokaler Tiefpunkt $T(x_0|f(x_0))$.

Leider sind diese Bedingungen nur hinreichend, nicht jedoch notwändig. D. h. man kann die Aussage nicht umkehren! Das zeigt auch das Beispiel $f(x) = -x^4$.
$\rightarrow$ Erste Ableitung: $f'(x) = -4x^3 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 0$ bei $x_0 = 0$
$\rightarrow$ Zweite Ableitung: $f''(x) = -12x^2 \quad \rightarrow \quad f''(x) = 0$ bei $x_0 = 0$
$\rightarrow$ ABER: Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = 0$ eindeutig ein lokales Maximum!

Die Bedingung mit $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$ ist als Nachweis für ein lokales Maximum anscheinend nicht optimal geeignet. Deshalb wurde nach einer weiteren Möglichkeit gesucht. Eine hinreichende und auch notwändige Bedingung für ein lokales Extrema lautet:

Ist $f'(x_0) = 0$ und wechseln die Ableitungswerte $f'(x)$ beim Überschreiten der Stelle x_0 in Richtung ansteigender x-Werte von ...

- ... positiven zu negativen Werten $\Rightarrow$ lokaler Hochpunkt $H(x_0|f(x_0))$.
- ... negativen zu positiven Werten $\Rightarrow$ lokaler Tiefpunkt $T(x_0|f(x_0))$.

Der Nachweis lokaler Extrema gelingt am einfachsten mit Hilfe einer Monotonietabelle. Vorgehen am Beispiel $f(x) = -x^4$:

1. Berechnung der ersten Ableitung: $f'(x) = -4x^3$.
2. Bestimmung aller Nullstellen der ersten Ableitung: $x_{N1} = 0$.
3. Aufstellen der Monotonietabelle

Teilintervalle bzw. Nullstellen	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
Vorzeichen von $f'(x)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$
Monotonie von G_f	streng monoton steigend $\nearrow$	—	streng monoton fallend $\searrow$

7.13 Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 1:
Gegeben seien die folgenden Punkte:

$$A(-2|-14) \qquad B(1|1,75) \qquad C(2|-2) \qquad D(4|4)$$

1. Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$ so, dass die gegebenen Punkte auf dem Graphen liegen.
2. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f(x)$.
3. Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion $f(x)$.
4. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graph von $f(x)$ bei $x_0 = 3$.
5. Geben Sie die Gleichung der Normalen an den Graph von $f(x)$ bei $x_0 = \frac{2}{3}$ an.
6. Bestimmen Sie die Stellen, an denen die Tangente die Steigung Null hat. Geben Sie von diesen Stellen die Koordinaten an. Beschreiben Sie was das Besondere an diesen Punkten ist.
7. Weisen Sie alle lokalen Extrema nach.
8. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ unter Zuhilfenahme der Ergebnisser aller vorsausgegangener Teilaufgaben.

Lösung:

1. Es sind vier Punkte gegeben. Somit können vier Unbekannte berechnet werden. Es soll also eine Funktion dritten Grades gefunden werden, welche die gegebenen Punkte enthält.
   → Aufstellen und lösen eines Gleichungssystems.

$$\begin{array}{rrrr|r} -8 & 4 & -2 & 1 & -14 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1,75 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 4 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1,75 \\ -8 & 4 & -2 & 1 & -14 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 4 \end{array} \quad\Rightarrow$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1,75 \\ 0 & 12 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & -16 \\ 0 & -48 & -60 & -63 & -108 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1,75 \\ 0 & 12 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & -36 & -27 & -108 \end{array} \quad\Rightarrow$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1,75 \\ 0 & 12 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 36 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 4 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = -3 \\ a_3 = \frac{3}{4} \end{array} \right.$$

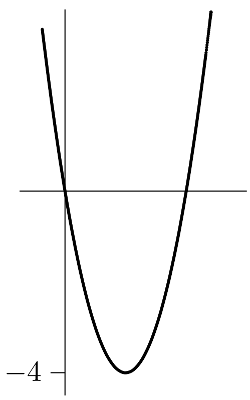
   Damit lautet die Gleichung der gesuchten Funktion:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{3}{4} \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 4}}$$

2. Das Monotonieverhalten wird mit der ersten Ableitung untersucht:

$$f'(x) = \frac{9}{4} \cdot x^2 - 6 \cdot x = x \cdot \left(\frac{9}{4} \cdot x - 6 \right)$$

   Entweder man überlegt sich, dass die erste Ableitung die Funktion einer nach oben geöffneten Parabel mit Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{8}{3}$ ist, *oder* man führt eine Vorzeichenuntersuchung (VZU) durch:



VZU				0					$\frac{8}{3}$			
x	−	−	−	()	+	+	+	+	+	+	+	+
$\frac{9}{4}x - 6$	−	−	−	−	−	−	−	−	()	+	+	+
$f'(x)$	+	+	+	()	−	−	−	−	()	+	+	+

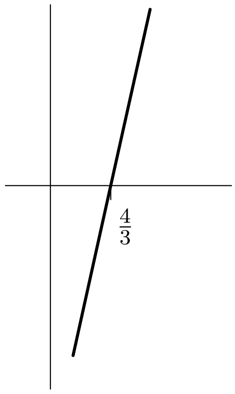
   → Anhand beider Vorgehensweisen erkennt man, dass die Funktionswerte der ersten Ableitung für $x < 0$ und $x > \frac{8}{3}$ positiv, im Intervall $]0; \frac{8}{3}[$ jedoch

negativ sind. Das bedeutet:
Der Graph der Funktion $f(x)$ ist in den Intervallen $]-\infty; 0[$ und $]\frac{8}{3}; +\infty[$ streng monoton steigend, in $]0; \frac{8}{3}[$ streng monoton fallend.

3. Um das Krümmungsverhalten zu untersuchen wird die zweite Ableitung benötigt:

$$f''(x) = \frac{9}{2} \cdot x - 6$$

Entweder man überlegt sich, dass der Graph der zweiten Ableitung eine ansteigende Gerade mit der Nullstelle bei $x_3 = \frac{4}{3}$ ist, oder man untersucht die Gleichung bzgl. ihres Vorzeichens mit Hilfe von Ungleichungen:



Linkskrümmung	Rechtskrümmung
$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$
$\frac{9}{2}x - 6 > 0$	$\frac{9}{2}x - 6 < 0$
$\frac{9}{2}x > 6$	$\frac{9}{2}x < 6$
$x > \frac{4}{3}$	$x < \frac{4}{3}$

$\rightarrow$ Da $f''(x)$ für $x < \frac{4}{3}$ kleiner Null, ist $f(x)$ für $x < \frac{4}{3}$ rechtsgekrümmt. Und da $f''(x)$ größer Null für $x > \frac{4}{3}$ ist der Graph der Funktion $f(x)$ in diesem Bereich linksgekrümmt.

4. Koordinaten des Punktes P_1 bei $x_0 = 3$ ermitteln.

$$\begin{aligned} & f(3) = -2,75 \\ \rightarrow \quad & P_1(3|-2,75) \end{aligned}$$

Steigung in x_0 berechnen:

$$f'(3) = 2,25$$

y-Abschnitt der Tangenten bestimmen:

$$\begin{aligned} y &= m \cdot x + t \\ -2,75 &= 2,25 \cdot 3 + t \\ t &= -9,5 \end{aligned}$$

Tangentengleichung in P_1 angeben:

$$\underline{\underline{y = 2,25 \cdot x - 9,5}}$$

5. Um die Gleichung der Normalen anzugeben muss zunächst die Steigung der Tangente an Graph bei $x_0 = \frac{2}{3}$ bestimmt werden.
Koordinaten des Punktes bei $x_0 = \frac{2}{3}$ ermitteln.

$$\begin{aligned} & f(\tfrac{2}{3}) = \tfrac{26}{9} \\ \rightarrow \quad & P_2(\tfrac{2}{3}|\tfrac{26}{9}) \end{aligned}$$

Steigung der Tangente in x_0 berechnen:

$$f'(\frac{2}{3}) = -3$$

Steigung der Normalen angeben:

$$m_{Normale} = -\frac{1}{m_{Tangente}} = \frac{1}{3}$$

y-Abschnitt der Normalen bestimmen:

$$\begin{aligned} y &= m \cdot x + t \\ \frac{26}{9} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + t \\ t &= \frac{24}{9} \end{aligned}$$

Normalengleichung in P_2 angeben:

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{24}{9}}}$$

6. Aus der Teilaufgabe 2 ist die erste Ableitung und deren Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{8}{3}$ bereits bekannt.

$$f(0) = 4 \qquad \rightarrow \qquad P_3(0|4)$$

$$f(\frac{8}{3}) = -\frac{28}{9} \qquad \rightarrow \qquad P_4(\frac{8}{3}|-\frac{28}{9})$$

Diese Punkte haben selbst keine Steigung. Interessant ist jedoch, dass genau in diesen Punkten die Steigung ihr Vorzeichen ändert (beispielsweise verläuft der Graph links von $x_1 = 0$ ansteigend, rechts davon fällt er jedoch ab). Das bedeutet jedoch, dass diese Punkte in der näheren Umgebung den höchsten bzw. tiefsten Punkt darstellen.

7. Die erste Ableitung mit ihren Nullstellen ist aus Teilaufgabe 2 bekannt.

$$f'(x) = \frac{9}{4} \cdot x^2 - 6 \cdot x = x \cdot \left(\frac{9}{4} \cdot x - 6\right)$$

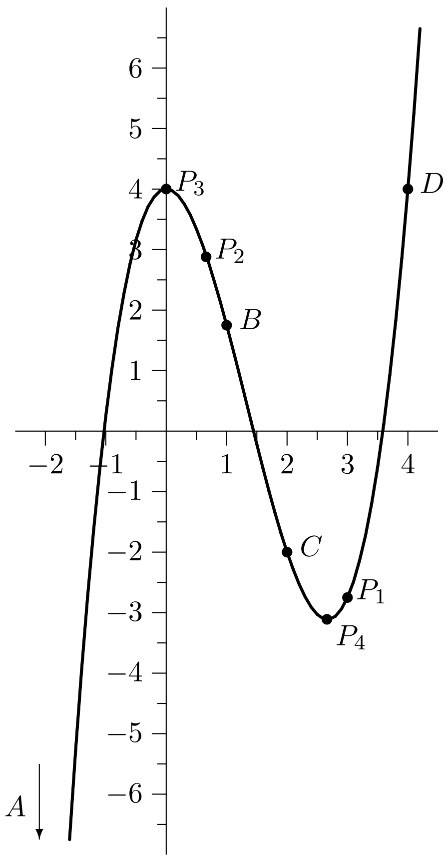
$$x_{N1} = 0 \qquad x_{N2} = \frac{8}{3}$$

Aufstellen der Monotonietabelle:

	$x < 0$	$x = 0$	$0 > x < \frac{8}{3}$	$x = \frac{8}{3}$	$x > \frac{8}{3}$
Vorzeichen von $f'(x)$	$+$		$-$		$+$
Monotonie	↗	—	↘	—	↗

8. Es sind folgende Eigenschaften des Graphen bekannt:

   - Die Koordinaten der vier Punkte $A(-2|-14)$, $B(1|1,75)$, $C(2|-2)$ und $D(4|4)$.
   - Der Graph verläuft links von $x = 0$ und rechts von $x = \frac{8}{3}$ streng monoton steigend, dazwischen streng monoton fallend.
   - Der Graph beschreibt links von $x = \frac{4}{3}$ eine Rechtskurve, ist also konvex, rechts von $x = \frac{4}{3}$ eine Linkskurve, und ist damit konkav.
   - Die Koordinaten der Punkte $P_1(3|-2,75)$, $P_2(\frac{2}{3}|\frac{26}{9})$, $P_3(0|4)$ und $P_4(\frac{8}{3}|-\frac{28}{9})$.



Übungsaufgabe 2:
Das statistische Bundesamt untersucht jedes Jahr die Preisentwicklung für einen so genannten Warenkorb. Als Bezugsgröße wurde das Jahr 2000 mit 100 Punkten festgesetzt. Die Daten folgender Jahre sind bekannt:

Jahr	Verbraucherpreisindex
1991	$81,9$
1997	$97,1$
2003	$104,5$

1. Bestimmen Sie eine mathematische Funktion, welche die Entwicklung des Verbraucherpreisindex möglichst genau beschreibt.
2. Untersuchen Sie, ob sich der Anstieg des Verbraucherpreisindex von 1991 bis 2003 verlangsamt, immer weiter steigert oder ob er konstant bleibt.
3. Um wieviel Punkte stiegen die Verbraucherpreise durchschnittlich von 1991 bis 1997 bzw. von 1997 bis 2003?
4. Wie hoch war die Steigerung des Preisindex in den Jahren 1994 und 2000?
5. Begründen Sie ob der Preisindex immer weiter ansteigen, oder evtl. auch einmal fallen wird. Falls der Index einmal fällt geben Sie an
   - welchen Höchststand er bis dahin erreicht hat und
   - in welchem Jahr diese Trendwende zu erwarten wäre.
6. Fertigen Sie zwei Skizzen an:
   - Grober Verlauf des Preisindex von $-1500 < x < 4000$
   - Ausschnittsvergrößerung für die Jahre 1991 bis 2003.
7. In nachfolgender Tabelle finden Sie die realen Indizes für die Jahre 1991 bis 2003. Übertragen Sie auch diese Werte in die eben angefertigte Skizze (Ausschnittsvergrößerung) und vergleichen Sie die berechneten mit den realen Daten.
   Überlegen Sie, warum die berechneten Werte nicht mit der Realität übereinstimmen?

Jahr	Verbraucherpreisindex
1991	$81,9$
1992	$86,1$
1993	$89,9$
1994	$92,3$
1995	$93,9$
1996	$95,3$
1997	$97,1$

Jahr	Verbraucherpreisindex
1998	$98,0$
1999	$98,6$
2000	100
2001	$100,2$
2002	$103,4$
2003	$104,5$

Quelle: Online Datenbank des statistischen Bundesamtes, Wiesbaden, Stand: 10.04.2004

Lösung:

1. Es sind vier (!) Werte bekannt: die in der Tabelle gegebenen und der Bezugswert aus dem Jahr 2000. Damit kann eine Funktion dritten Grades aufgestellt werden:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = y$$

$\rightarrow$ Aufstellen eines Gleichungssystems:

$$\begin{array}{lllll}
a_3 \cdot 1991^3 & +a_2 \cdot 1991^2 & +a_1 \cdot 1991 & +a_0 & = 81,9 \\
a_3 \cdot 1997^3 & +a_2 \cdot 1997^2 & +a_1 \cdot 1997 & +a_0 & = 97,1 \\
a_3 \cdot 2000^3 & +a_2 \cdot 2000^2 & +a_1 \cdot 2000 & +a_0 & = 100 \\
a_3 \cdot 2003^3 & +a_2 \cdot 2003^2 & +a_1 \cdot 2003 & +a_0 & = 104,5
\end{array}$$

$\rightarrow$ Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrr|r}
7,89 \cdot 10^9 & 3964081 & 1991 & 1 & 81,9 \\
7,96 \cdot 10^9 & 3988009 & 1997 & 1 & 97,1 \\
8 \cdot 10^9 & 4000000 & 2000 & 1 & 100 \\
8,04 \cdot 10^9 & 4012009 & 2003 & 1 & 104,5
\end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rrrr|r}
7,89 \cdot 10^9 & 3964081 & 1991 & 1 & 81,9 \\
0 & -11352,3 & 11,72 & -0,0089 & 14,47 \\
0 & -19181,7 & -18,67 & -0,0139 & 16,96 \\
0 & -27389,5 & -25,83 & -0,019 & 21,04
\end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rrrr|r}
7,89 \cdot 10^9 & 3964081 & 1991 & 1 & 81,9 \\
0 & -11352,3 & 11,72 & -0,0089 & 14,47 \\
0 & 0 & -38,47 & 0,0011 & -7,489 \\
0 & 0 & -54,11 & 0,0025 & -13,88
\end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rrrr|r}
7,89 \cdot 10^9 & 3964081 & 1991 & 1 & 81,9 \\
0 & -11352,3 & 11,72 & -0,0089 & 14,47 \\
0 & 0 & -38,47 & 0,0011 & -7,489 \\
0 & 0 & 0 & 0,0009 & -3,35
\end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = & -3722,22 \\ a_1 = & 0,088 \\ a_2 = & 0,0017 \\ a_3 = & -3,94 \cdot 10^{-7} \end{cases}$$

Damit lautet die Gleichung der gesuchten Funktion:

$$\underline{\underline{f(x) = -3,94 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 + 0,0017 \cdot x^2 + 0,088 \cdot x - 3722,22}}$$

2. Erfolgt der Anstieg des Verbraucherpreisindex immer schneller, so muss sein Graph eine Linkskurve beschreiben, wird die Zunahme des Index jedoch gedämpf, so verläuft der Graph rechtsgekrümmt. Nur bei einer kontinuierlichen Steigerung wäre der Graph eine Gerade.

   → Untersuchung des Krümmungsverhaltens mit Hilfe der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= -3,94 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 + 0,0017 \cdot x^2 + 0,088 \cdot x - 3722,22 \\ f'(x) &= -1,182 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 0,0034 \cdot x + 0,088 \\ f''(x) &= -2,364 \cdot 10^{-6} \cdot x + 0,0034 \end{aligned}$$

   Man erkennt, dass für alle x-Werte $1991 \leq x \leq 2003$ die Funktionswerte der zweiten Ableitung negativ sind. Das bedeutet der Graph des Verbraucherpreisindex ist in diesem Zeitraum rechtsgekrümmt (konvex). Der Anstieg der Verbraucherpreise erfolgt also immer langsamer!

3. Um eine durchschnittliche Steigung auszurechnen wird <u>keine</u> Ableitung benötigt!

$$m_{\varnothing 1} = \frac{97,1-81,9}{1997-1991} \qquad m_{\varnothing 2} = \frac{104,5-97,1}{2003-1997}$$

$$m_{\varnothing 1} = 2,53 \qquad m_{\varnothing 2} = 1,23$$

4. Es soll die lokale Änderungsrate bestimmt werden. Diese wird durch die erste Ableitung (siehe Teilaufgabe 2) ausgedrückt.

$$\begin{aligned} m_{1994} &= f'(1994) & \qquad m_{2000} &= f'(2000) \\ m_{1994} &= 2,1679 & \qquad m_{2000} &= 2,16 \end{aligned}$$

5. Es muss untersucht werden ob, und gegebenenfalls ab wann, die Steigung des Graphen negativ wird.

$$\begin{aligned} 0 &> f'(x) \\ 0 &> -1,182 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 0,0034 \cdot x + 0,088 \end{aligned}$$

Da der Funktionsterm der ersten Ableitung eine Funktion zweiten Grades ist, wird das Problem zunächst in eine quadratische Gleichung umgeformt und diese mit der Lösungsformel gelöst.

$$\begin{aligned} 0 &= -1,182 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 0,0034 \cdot x + 0,088 \\ \rightarrow x_{1/2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_{1/2} &= \frac{-0,0034 \pm \sqrt{0,0034^2 - 4 \cdot (-1,182 \cdot 10^{-6}) \cdot 0,088}}{2 \cdot (-1,182 \cdot 10^{-6}} \\ x_{1/2} &= \frac{-0,0034 \pm \sqrt{1,1976 \cdot 10^{-5}}}{-2,364 \cdot 10^{-6}} \\ x_{1/2} &= \frac{-0,0034 \pm 3,4606 \cdot 10^{-3}}{-2,364 \cdot 10^{-6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow x_1 &\approx -25 \\ x_2 &\approx 2902 \end{aligned}$$

Die erste Lösung $x_1 \approx -25$ ist zwar mathematisch richtig, aber natürlich keine sinnvolle Lösung für das vorliegende Problem.

Im Jahr 2902 wird der Preisindex nicht steigen, da $f'(2902) \approx 0$.
Für alle späteren Jahre sind die Funktionswerte der ersten Ableitung negativ (z. B. $f'(2903) \approx -0,003$). D. h. der Preisindex fällt.

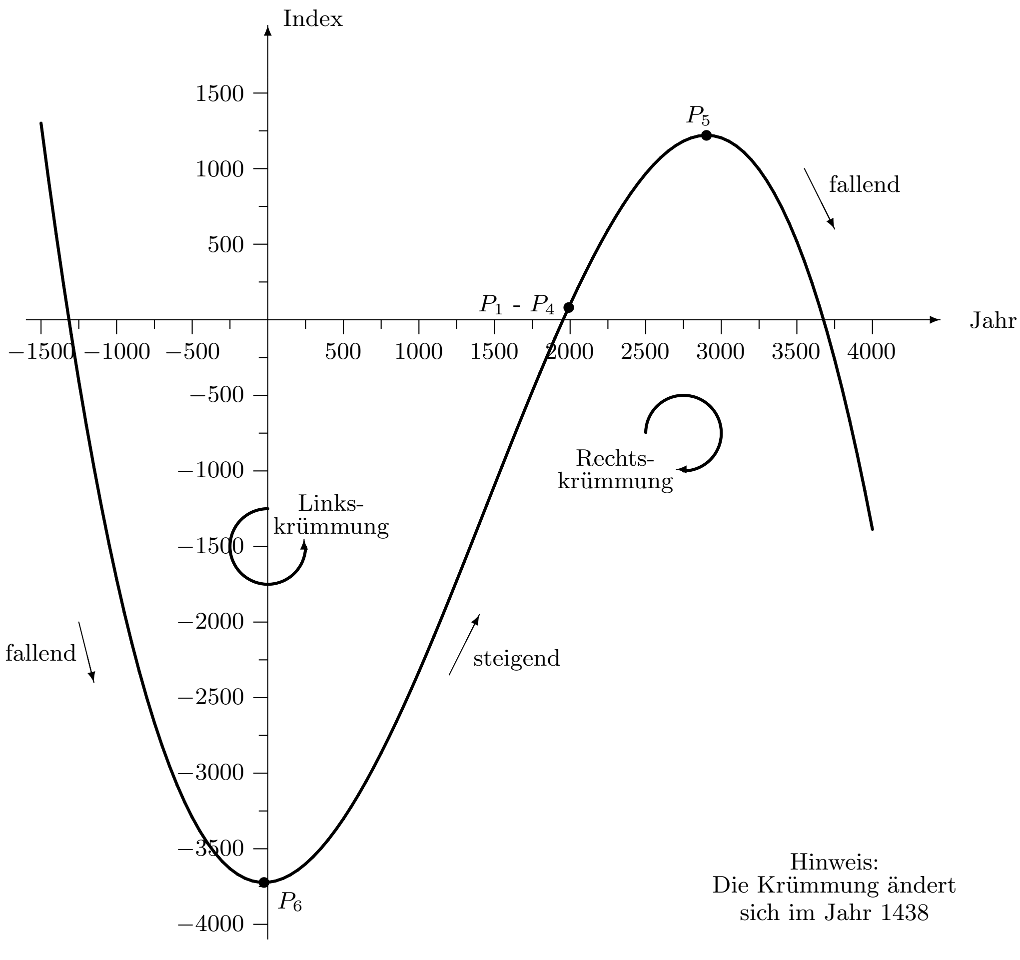
Um den Höchststand zu ermitteln muss nur die Jahreszahl in die Funktionsgleichung eingesetzt werden:

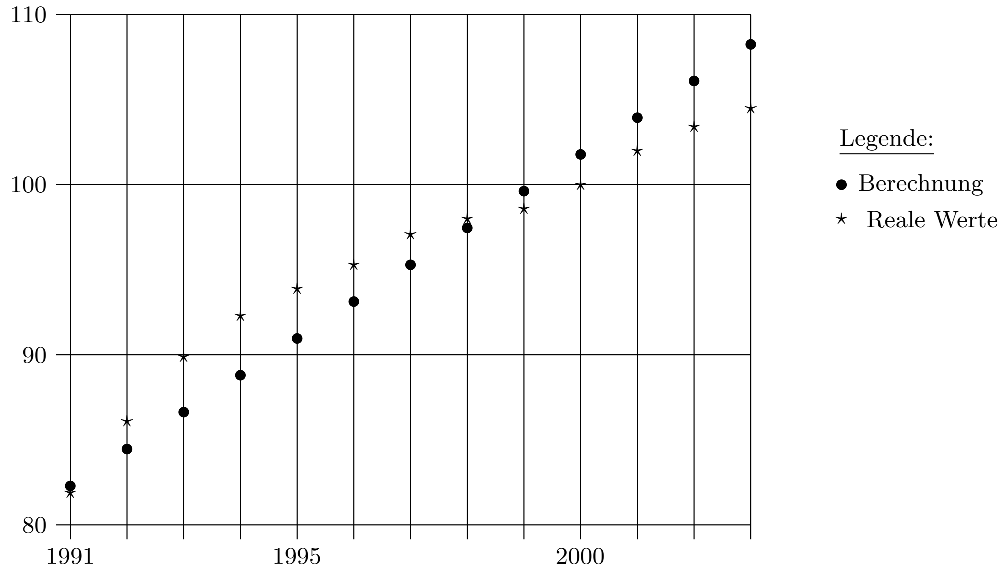
$$\underline{\underline{f(2902) \approx 1220,72}}$$

Anmerkung: Im Jahr -25 hätte der Index einen Tiefststand von $f(-25) \approx -3723,35$ gehabt.

6. Folgende Eigenschaften des Graphen sind bekannt:

   - Die Punkte $P_1(1991|81,9)$, $P_2(1997|97,1)$, $P_3(2000|100)$ und $P_4(2003|104,5)$.
   - In den Jahren 1991 bis 2003 steigt der Graph und ist rechtsgekrümmt.
   - In den Jahren -25 und 2902 hat der Graph keine Steigung (waagrechte Tangente). Daher sind die Punkte $P_5(2902|1220,7)$ und $P_6(-25|-3723,4)$ bekannt.
   - Ab dem Jahr 2902 fällt der Graph.





7. Die errechnete Funktion für den Verbraucherpreisindex ist eine Funktion dritten Grades. Betrachtet man die Funktion dritten Grades jedoch nur für den Bereich 1991 bis 2003, so erscheint dieser Ausschnitt wie eine Gerade. Die eigentlich vorhandene Krümmung ist nicht mehr erkennbar.
   Die Realität wird durch die aufgestellte Funktion einfach zu ungenau abgebildet. Insbesondere falls genauere Prognosen für die kommenden Jahre abgegeben werden sollen muss dieses mathematische Modell verfeinert werden.
   Dies könnte erreicht werden wenn mit Hilfe aller bekannten Daten aus den Jahren 1991 bis 2003 ein Gleichungssystem aufgestellt und damit eine Funktion vom Grad 12 berechnet würde. Man erkennt jedoch auch, dass der Aufwand für eine Präzisierung der Vorhersagen beträchtlich wird!

Übungsaufgaben (Teil 3):

Geben Sie den Term einer Funktion mit den geforderten Eigenschaften an.

1. Hochpunkt bei $x_1 = -2$ und Tiefpunkt bei $x_2 = 3$.
2. Rechtsgekrümmt für $x < -1$, Punkt $P(2|6)$ liegt auf dem Graphen.
3. Terrassenpunkt bei $T(4|-1)$
4. Tiefpunkte bei $x_1 = 2$ und $x_2 = 8$
5. Graph verläuft im Intervall $]-\infty; -6[$ streng monoton steigend und weist bei $x = 3$ eine Linkskrümmung auf.
6. Tiefpunkt bei $x_1 = -1$ und Hochpunkt bei $x_2 = 4$.
7. Hochpunkt bei $P(-7|2)$.

Lösung (Teil 3):

1. Bedingungen:

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0$$

$$f''(x_1) < 0 \qquad \wedge \qquad f''(x_2) > 0$$

Möglicher Ansatz über die 1. Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+2)\cdot(x-3) \\ &= x^2 - x - 6 \end{aligned}$$

Prüfung, ob damit auch die Bedingung der 2. Ableitung erfüllt wird:

$$\begin{aligned} & f''(x) &=& \ 2x - 1 \\ \rightarrow\quad & f''(x_1) &=& \ 2\cdot(-2) - 1 = -5 \quad < 0 \quad \checkmark \\ \rightarrow\quad & f''(x_2) &=& \ 2\cdot 3 - 1 = 5 \quad > 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Alle Bedingungen sind erfüllt. Damit lautet ein möglicher Funktionsterm:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{1}{2}\cdot x^2 - 6\cdot x}}$$

2. Bedingungen:

$$f''(x < -1) < 0 \qquad \wedge \qquad f(2) = 6$$

Möglicher Ansatz über die 2. Ableitung:

$$\begin{aligned} f''(x) &= x \\ \rightarrow \quad f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot x^2 + a \\ \rightarrow \quad f(x) &= \frac{1}{6} \cdot x^3 + a \cdot x + b \end{aligned}$$

Zweite Bedingung wird berücksichtigt:

$$\begin{aligned} f(2) &= 6 \\ \frac{1}{6} \cdot x^3 + a \cdot x + b &= 6 \\ \frac{4}{3} + 2a + b &= 6 \\ b &= \frac{14}{3} - 2a \end{aligned}$$

Alle Forderungen an den Funktionsterm sind berücksichtigt. Somit lautet dieser:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{6} \cdot x^3 + a \cdot x + \frac{14}{3} - 2a}}$$

3. Bedingungen:

$$f'(4) = 0 \qquad \wedge \qquad f''(4) = 0$$

Ansatz über 2. Ableitung:

$$f''(x) = x - 4$$

$\rightarrow$ 1. Ableitung ermitteln:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + a$$

$$\begin{aligned} f'(4) &= 0 \qquad \text{(Bedingung!)} \\ \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + a &= 0 \\ 8 - 16 + a &= 0 \\ a &= 8 \\ \rightarrow f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot x^2 - 4 \cdot x + 8 \end{aligned}$$

Funktionsterm bestimmen:

$$f(x) = \frac{1}{6} \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 8 \cdot x + b$$

$$\begin{aligned} f(4) &= -1 \qquad \text{(Bedingung!)} \\ \frac{1}{6} \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 8 \cdot x + b &= -1 \\ \frac{32}{3} - 32 + 32 + b &= -1 \\ b &= -\frac{35}{3} \end{aligned}$$

Alle Bedingungen sind berücksichtigt, damit lautet der Funktionsterm:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{6} \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 8 \cdot x - \frac{35}{3}}}$$

4. Bedingungen:

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0$$

$$f''(x_1) > 0 \qquad \wedge \qquad f''(x_2) > 0$$

Da $x_1 = 2$ und $x_2 = 8$ bereits positiv sind lautet der einfachste Ansatz mit der zweiten Ableitung:

$$f''(x) = x$$

Damit erhält man die folgende 1. Ableitung:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + a$$

Mit der ersten Bedingung ergibt sich:

$$\begin{aligned} f'(x_1) = 0 \quad &\wedge \quad f'(x_2) = 0 \\ f'(x_1) &= f'(x_2) \\ \frac{1}{2} \cdot 2^2 + a &= \frac{1}{2} \cdot 8^2 + a \\ 2 &= 32 \qquad \text{Widerspruch!!} \end{aligned}$$

Neuer Ansatz: Zu etwas positivem darf etwas dazugezählt werden. Es bleibt positiv.

$$f''(x) = x + a \qquad \spadesuit$$

Damit bekommt man folgende (vorläufige) 1. Ableitung:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + ax + b$$

Mit der ersten Bedingung ergibt sich:

$$\begin{aligned} f'(x_1) = 0 \quad &\wedge \quad f'(x_2) = 0 \\ \frac{1}{2}\cdot 2^2 + a\cdot 2 + b &= \frac{1}{2}\cdot 8^2 + a\cdot 8 + b \\ 2 + 2a + b &= 32 + 8a + b \\ 6a + 30 &= 0 \\ a &= -5 \qquad \clubsuit \end{aligned}$$

Damit lässt sich die 1. Ableitung folgendermaßen konkretisieren:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot x^2 - 5\cdot x + b$$

Berücksichtigt man nun noch dass die erste Ableitung bei x_1 und x_2 nicht nur den gleichen Wert, sondern genau den Wert Null haben soll, so erhält man:

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= 0 \\ \tfrac{1}{2}\cdot 2^2 - 5\cdot 2 + b &= 0 \\ 2 - 10 + b &= 0 \\ b &= 8 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f'(x_2) &= 0 \\ \tfrac{1}{2}\cdot 8^2 - 5\cdot 8 + b &= 0 \\ 32 - 40 + b &= 0 \\ b &= 8 \end{aligned}$$

Damit erhält man die 1. Ableitung zu:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot x^2 - 5x + 8$$

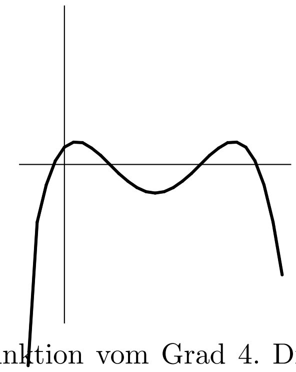
Alle Bedingungen sind berücksichtigt, womit man einen möglichen Funktionsterm angeben kann:

$$f(x) = \frac{1}{6}\cdot x^3 - \frac{5}{2}\cdot x^2 + 8\cdot x + c$$

Zeichnet man den Graph so erkennt man, dass bei x_1 und x_2 zwar Extrema liegen, jedoch nur bei $x_1 = 2$ ein Hochpunkt, während sich bei $x_2 = 8$ ein Tiefpunkt befindet.
Der Grund liegt in der Berechnung des Parameters a. An der mit $\spadesuit$ gekennzeichneten Stelle wurde vergessen zu definieren dass a größer als -2 sein muss damit die zweite Ableitung für x_1 und x_2 größer Null bleibt. Hätte man die Definitionsmenge richtig angegeben wäre man bereits bei $\clubsuit$ auf den Widerspruch gestoßen.

Neuer Ansatz: Da der Graph zwei Hochpunkte haben soll muss dazwischen ein lokaler Tiefpunkt liegen. Frei skizziert wird der Graph folgende

Form haben:



Dies entspricht einer Funktion vom Grad 4. Die zweite Ableitung muss also vom Grad zwei sein.

Erneuter Ansatz mit einer 2. Ableitung vom Grad 2:

$$f''(x) = x^2 + ax + b$$

Dies ist der Graph einer nach oben geöffneten Parabel. Nach den eingangs aufgestellten Bedingungen soll die zweite Ableitung für $x_1 = 2$ und $x_2 = 8$ größer Null sein. Es bietet sich also an zunächst die Nullstellen der Parabel zu berechnen.

$$\left.\begin{array}{lclcr} f''(2) = 0 & \rightarrow & 2^2 + 2 \cdot a + b = 0 & \rightarrow & 4 + 2 \cdot a + b = 0 \\ f''(8) = 0 & \rightarrow & 8^2 + 8 \cdot a + b = 0 & \rightarrow & 64 + 8 \cdot a + b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad a = -10$$

Um sicherzustellen dass die zweite Ableitung auch wirklich positiv ist wird nun noch der Wert des Parameters b bestimmt.

$$\left.\begin{array}{lclcr} f''(2) > 0 & \rightarrow & 2^2 + 2 \cdot (-10) + b > 0 & \rightarrow & 4 - 20 + b > 0 \\ f''(8) > 0 & \rightarrow & 8^2 + 8 \cdot (-10) + b > 0 & \rightarrow & 64 - 80 + b > 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad b > 16$$

Somit lautet die zweite Ableitung:

$$f''(x) = x^2 - 10 \cdot x + b \qquad\qquad b > 16$$

Nun kann die erste Ableitung ermittelt werden:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + bx + c$$

Mit der Bedingung für die erste Ableitung gilt:

$$\left.\begin{array}{lclcr} f'(2) = 0 & \rightarrow & \frac{1}{3}2^3 - 5 \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 0 & \rightarrow & -\frac{52}{3} + 2b + c = 0 \\ f'(8) = 0 & \rightarrow & \frac{1}{3}8^3 - 5 \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c = 0 & \rightarrow & -\frac{448}{3} + 8b + c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 22 \\ c = -\frac{80}{3} \end{array}\right.$$

Damit kann man die vollständige erste Ableitung angeben:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 22 \cdot x - \frac{80}{3}$$

Ausgehend von der ersten Ableitung bekommt man direkt den Funktionsterm:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{12} \cdot x^4 - \frac{5}{3} \cdot x^3 + 11 \cdot x^2 - \frac{80}{3} \cdot x + d}}$$

5. Bedingungen:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad &\text{für} \quad x \in]-\infty; -6[\\ f''(x) > 0 \quad &\text{bei} \quad x = 3 \end{aligned}$$

Einfachster Ansatz (damit die Funktion den kleinstmöglichen Grad hat):

$$f''(x) = a \qquad\qquad a > 0$$

Damit lautet die erste Ableitung:

$$f'(x) = ax + b$$

Leider ist mit dieser ersten Ableitung die oben formulierte Bedingung $f'(x) > 0$ nicht sicher erfüllbar. Egal wie hoch der Parameter a gewählt wird und welchen Wert man für x einsetzt: man findet immer ein b so, dass die erste Ableitung negativ wird.

Neuer Ansatz:

$$f''(x) = x + a \qquad\qquad a > -3$$

Damit erhält man die erste Ableitung:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + a \cdot x + b$$

Dies ist eine nach oben geöffnete Parabel. Da der Graph der Funktion für alle Werte $x < -6$ steigen soll, muss die erste Ableitung dort positiv sein und für größere x-Werte negativ. Bei $x = 0$ hat die erste Ableitung also eine Nullstelle:

$$\begin{aligned} f'(-6) &= 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (-6)^2 + a \cdot (-6) + b &= 0 \\ 18 - 6 \cdot a + b &= 0 \\ b &= 6a - 18 \end{aligned}$$

Somit lautet die (vorläufige) erste Ableitung:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + a \cdot x + 6a - 18$$

Diese erste Ableitung soll für alle Werte kleiner als -6 positiv sein. Man sucht sich einfach einen passenden x-Wert (z. B. $x = -10$) aus und erhält:

$$\begin{aligned} f'(-10) &> 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (-10)^2 + a \cdot (-10) + 6a - 18 &> 0 \\ 50 - 10 \cdot a + 6a - 18 &> 0 \\ 32 - 4 \cdot a &> 0 \\ a &> -8 \end{aligned}$$

Ein Funktionsterm mit den gewünschten Eigenschaften lautet damit:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{a}{2} \cdot x^2 + (6a - 18) \cdot x + b \qquad \text{mit:} \quad a > -8}}$$

6. Bedingungen:

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0$$
$$f''(x_1) > 0 \qquad \wedge \qquad f''(x_2) < 0$$

Ansatz über die erste Ableitung:

$$f'(x) = (x + 1) \cdot (x - 4) = x^2 - 3x - 4$$

Überprüfen des Ansatzes mit den Bedingungen der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2x - 3 \\ f''(x_1) &= 2 \cdot (-1) - 3 = -5 && < 0 && \wr \text{ Widerspruch zu Bedingung!} \\ f''(x_2) &= 2 \cdot 4 - 3 = 5 && > 0 && \wr \text{ Widerspruch zu Bedingung!} \end{aligned}$$

Anschauliche Erklärung: Der Graph der ersten Ableitung ist eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 4$.
Links von der linken Nullstelle muss der Graph demnach fallen, rechts von der rechten Nullstellen muss er steigen. Das ist der Bedingung aus der zweiten Ableitung jedoch genau entgegen gerichtet.
Abhilfe kann man schaffen indem der Graph an der x-Achse gespiegelt wird - dies entspricht einer Multiplikation des Funktionsterms mit -1:

$$f'(x) = -x^2 + 5x + 4$$

Überprüfen dieses Ansatzes mit den Bedingungen der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2x + 3 \\ f''(x_1) &= -2 \cdot (-1) + 3 = 5 && < 0 && \checkmark \\ f''(x_2) &= -2 \cdot 4 + 3 = -5 && > 0 && \checkmark \end{aligned}$$

Damit kann der Funktionsterm angegeben werden:

$$\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2 + 4 \cdot x + a}}$$

7. Da laut Aufgabenstellung ein beliebiger Funktionsterm gesucht ist der diese Eigenschaft aufweist kann man eine Lösung durch Überlegen angeben:
   Besitzt die Funktion nur einen Hochpunkt muss es sich um eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel als Hochpunkt handeln.
   Damit lautet ein Funktionsterm:

$$\underline{\underline{f(x) = -(x+7)^2 + 2 = -x^2 - 14x - 47}}$$

Die aufwändigere (dafür allgemeinere) Lösung:
Bedingungen:

$$f'(-7) = 0 \qquad \wedge \qquad f''(-7) < 0$$

Der einfachste Ansatz zur Erfüllung der Bedingung der zweiten Ableitung lautet:

$$f''(x) = a \qquad \text{mit: } a < 0$$

Damit kann die erste Ableitung ermittelt werden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= ax + b \\ \\ f'(-7) &= 0 \\ a \cdot (-7) + b &= 0 \\ b &= 7 \cdot a \\ \\ \rightarrow \quad f'(x) &= a \cdot x + 7 \cdot a \end{aligned}$$

Damit kann man den (vorläufigen) Funktionsterm angeben:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a}{2} \cdot x^2 + 7a \cdot x + c \\ \\ f(-7) &= 2 \\ \frac{a}{2} \cdot (-7)^2 + 7a \cdot (-7) + c &= 2 \\ 24,5a - 49a + c &= 2 \\ c &= 2 + 24,5a \end{aligned}$$

Damit lautet der gesuchte Funktionsterm:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{a}{2} \cdot x^2 + 7a \cdot x + 2 + 24,5a \qquad \text{mit: } a < 0}}$$

Übungsaufgaben (Teil 4):

1. Gegeben sei die Funktion $x \mapsto f(x) = \frac{1}{8} \cdot x \cdot (x^2 - 4) \cdot (4 - x^2)$.
   (a) Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten der Funktion.
   (b) Geben Sie die Nullstellen der Funktion und deren Art an.
   (c) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$.
   (d) Zeigen Sie dass $f(x)$ bei $x_1 = -2$ und bei $x_2 = 2$ lokale Extremstellen besitzt. Geben Sie deren Art an.
   (e) Untersuchen Sie ob es neben x_1 und x_2 noch weitere Extrema gibt. Geben Sie evtl. deren Art an.
   (f) Bestimmen Sie die Wendepunkte der Funktion.
2. Gegeben sei die Funktion $x \mapsto f(x) = -\frac{1}{8} \cdot (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 15)$.
   (a) Zeigen Sie dass $f(x)$ nur die Nullstellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$ hat.
   (b) Bestätigen Sie: $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x+1)^3$.
   (c) Bestimmen Sie ausschließlich mit der 1. Ableitung die Art des Punktes mit waagrechter Tangengte.
   (d) Zeigen Sie, dass G_f keinen Wendepunkt besitzt.
   (e) Weisen Sie nach, dass für alle $x \in \mathbf{R}$ gilt: $f(-1+x) = f(-1-x)$. Welche Eigenschaft des Graphen wird damit bewiesen?
   (f) Zeichnen Sie die Graphen der Funktion, der ersten und der zweiten Ableitung in ein kartesisches Koordinatensystem.
3. Durch $f(x) = \frac{1}{36}x^4 - \frac{8}{27}x^3 + cx^2 + 4$ ist eine Funktionenschar f_c gegeben.
   (a) Zeigen Sie dass alle Graphen von f_c den Punkt $P(0|4)$ beinhalten.
   (b) Weisen Sie nach dass alle Graphen der Schar im Punkt $P(0|4)$ eine waagrechte Tangente haben.
   (c) Untersuchen Sie in Abhängigkeit vom Parameter c von welcher Art der Punkt $P(0|4)$ jeweils ist.
   (d) Zeigen Sie dass die folgenden vier Forderungen jede für sich den Parameterwert $c = \frac{2}{3}$ liefern:
      i. G_f soll bei $x = 6$ einen Schnittpunkt mit der x-Achse haben.
      ii. G_f soll bei $x = 6$ eine waagrechte Tangente haben.
      iii. G_f soll bei $x = 2$ eine waagrechte Tangente haben.
      iv. G_f soll bei $x = 3$ die Steigung -1 haben.
   (e) Geben Sie die Koordinaten aller Punkte mit waagrechten Tangenten für den Graphen zum Parameterwert $c = \frac{2}{3}$ an und bestimmen Sie die Art der Punkte.
   (f) Skizzieren Sie den Graphen G_f in ein kartesisches Koordinatensystem.

Lösung (Teil 4):

1. (a) Funktion ausmultipliziert:

$$f(x) = -\frac{1}{8} \cdot (x^5 - 8x^3 + 16x)$$

Die Funktion hat nur ungerade Exponenten
$\rightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung.

(b) Funktion in Faktoren zerlegt:

$$f(x) = -\frac{1}{8} \cdot x \cdot (x-2)^2 \cdot (x+2)^2$$

Eine einfache Nullstelle bei $x_0 = 0$ ($\rightarrow$ Vorzeichenwechsel).
Zwei doppelte Nullstellen bei $x_1 = -2$ und bei $x_2 = 2$ ($\rightarrow$ Berührpunkte).

(c) Für $x \rightarrow +\infty$: $f(x) \rightarrow -\infty$
Für $x \rightarrow -\infty$: $f(x) \rightarrow +\infty$

(d) $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ in $f'(x)$ einsetzen und überprüfen ob Ergebnis Null ist.

$$f'(x) = -\frac{1}{8} \cdot (5x^4 - 24x^2 + 16)$$

$$\begin{aligned} f'(-2) &= -\frac{1}{8} \cdot (5 \cdot (-2)^4 - 24 \cdot (-2)^2 + 16) \\ &= -\frac{1}{8} \cdot (80 - 96 + 16) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= -\frac{1}{8} \cdot (5 \cdot (2)^4 - 24 \cdot (2)^2 + 16) \\ &= -\frac{1}{8} \cdot (80 - 96 + 16) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Ableitung bestimmen:

$$f''(x) = -\frac{1}{8} \cdot (20x^3 - 48x)$$

$$\begin{aligned} f''(-2) &= -\frac{1}{8} \cdot (20 \cdot (-2)^3 - 48 \cdot (-2)) \\ &= -\frac{1}{8} \cdot (-160 + 96) \\ &= 8 \qquad \rightarrow f''(-2) > 0 \quad \rightarrow \text{Linkskrümmung} \quad \rightarrow \text{TP}_1(-2|0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(2) &= -\frac{1}{8} \cdot (20 \cdot 2^3 - 48 \cdot 2) \\ &= -\frac{1}{8} \cdot (160 - 96) \\ &= -8 \qquad \rightarrow f''(2) < 0 \quad \rightarrow \text{Rechtskrümmung} \quad \rightarrow \text{HP}_1(2|0) \end{aligned}$$

(e) Polynomdivision (1. Ableitung durch die bekannten Nullstellen):

$$\begin{aligned}(-\frac{5}{8}x^4+3x^2-2):(x+2) &= -\frac{5}{8}x^3+\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{2}x-1\\ (-\frac{5}{8}x^3+\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{2}x-1):(x-2) &= -\frac{5}{8}x^2+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Restliche Nullstellen bestimmen:

$$\begin{aligned}-\frac{5}{8}x^2+\frac{1}{2} &= 0\\ x_{3/4} &= \frac{0\pm\sqrt{0^2-4\cdot(-\frac{5}{8})\cdot\frac{1}{2}}}{2\cdot(-\frac{5}{8})}\\ &= \pm\frac{2}{5}\sqrt{5}\end{aligned}$$

x-Werte der Extremstellen in 2.Ableitung einsetzen:

$$\begin{aligned}f''(-\frac{2}{5}\sqrt{5}) &= -\frac{1}{8}\cdot(20\cdot(-\frac{2}{5}\sqrt{5})^3-48\cdot(-\frac{2}{5}\sqrt{5}))\\ &\approx -3,58 \qquad \rightarrow f''(-\frac{2}{5}\sqrt{5})<0 \qquad \rightarrow \mathrm{HP}_2\left(-\frac{2}{5}\sqrt{5}\middle|\frac{64}{125}\sqrt{5}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''(\frac{2}{5}\sqrt{5}) &= -\frac{1}{8}\cdot(20\cdot(\frac{2}{5}\sqrt{5})^3-48\cdot(\frac{2}{5}\sqrt{5}))\\ &\approx 3,58 \qquad \rightarrow f''(\frac{2}{5}\sqrt{5})>0 \qquad \rightarrow \mathrm{TP}_2\left(-\frac{2}{5}\sqrt{5}\middle|-\frac{64}{125}\sqrt{5}\right)\end{aligned}$$

(f) Nullstellen der zweiten Ableitung bestimmen:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{8}\cdot(20x^3-48x) &= 0\\ -\frac{1}{8}\cdot x\cdot(20x^2-48) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= 0\\ x_{2/3} &\approx \pm 1,55\end{aligned}$$

Mit dritter Ableitung überprüfen (diese muss $\neq 0$ sein):

$$f'''(x) = -\frac{1}{8}\cdot(60x^2-48)$$

$$\begin{aligned}f'''(0) &= 6 \quad \checkmark\\ f'''(\pm 1,55) &\approx -12,02 \quad \checkmark\end{aligned}$$

Wendepunkte:

$$\mathrm{WP}_1(-1,55|0,49) \qquad \mathrm{WP}_2(0|0) \qquad \mathrm{WP}_3(1,55|-0,49)$$

2. (a) Der Vorfaktor kann nicht zu Null werden, also müssen die Nullstellen in der Klammer stecken. Diese wird in ihre Linearfaktoren zerlegt:

$$(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 15) : (x + 3) = x^3 + x^2 + 3x - 5$$

$$(x^3 + x^2 + 3x - 5) : (x - 1) = x^2 + 2x + 5$$

Nun muss untersucht werden ob im dem restlichen Polynom noch weitere Nullstellen stecken:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 5 &= 0 \\ x_{1/2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} \end{aligned}$$

Diskriminante ist kleiner als Null. Damit gibt es keine weiteren Nullstellen! Die Funktion lautet in Linearfaktoren zerlegt:

$$f(x) = -\frac{1}{8} \cdot (x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 2x + 5)$$

(b) Gegebene Funktion ableiten:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{8} \cdot (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 15) \\ \rightarrow f'(x) &= -\frac{1}{8} \cdot (4x^3 + 12x^2 + 12x + 4) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \end{aligned}$$

Gegebene Ableitung ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2} \cdot (x + 1)^3 \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (x + 1) \cdot (x + 1)^2 \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 2x + 1) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \end{aligned}$$

Beide erste Ableitungen stimmen überein!

(c) Aus der gegebenen ersten Ableitung $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x + 1)^3$ kann man die Stelle mit der waagrechten Tangente sofort ablesen: Dreifache Nullstelle bei $x_0 = -1$.
Art des Extremums erhält man, indem das Vorzeichen der ersten Ableitung links und rechts der Nullstelle betrachtet wird.

$$\left.\begin{aligned} sgn[f'(-2)] &= 1 \\ sgn[f'(0)] &= -1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{HP bei } x_0 = -1 \qquad \rightarrow \qquad HP(-1|2)$$

(d) Bedingung für Wendepunkt(e) wäre:

$$f''(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad f'''(x) \neq 0$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -\frac{1}{2} \cdot (3x^2 + 6x + 3) \\
f''(x) &= 0 \\
3x^2 + 6x + 3 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= -3 \cdot (x+1) \\
f'''(-1) &= 0
\end{aligned}$$

Widerspruch zur Bedingung für Wendepunkt(e) $\rightarrow$ Es gibt keinen Wendepunkt.

(e) Die Werte $(-1+x)$ und $(-1-x)$ werden in die in Linearfaktoren zerlegte Funktion (siehe Teilaufgabe 2a) eingesetzt.

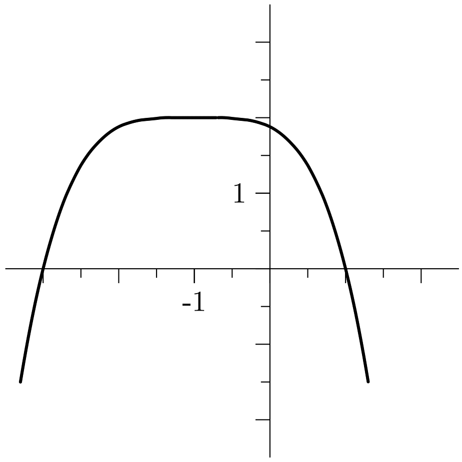
$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{8} \cdot (x+3) \cdot (x-1) \cdot (x^2 + 2x + 5) \\
f(-1+x) &= -\frac{1}{8} \cdot ([-1+x]+3) \cdot ([-1+x]-1) \cdot ([-1+x]^2 + 2[-1+x] + 5) \\
&= -\frac{1}{8} \cdot (x+2) \cdot (x-2) \cdot (x^2+4) \\
&= -\frac{1}{8} \cdot (x^2-4) \cdot (x^2+4) \\
&= -\frac{1}{8} \cdot (x^4 - 16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(-1-x) &= -\frac{1}{8} \cdot ([-1-x]+3) \cdot ([-1-x]-1) \cdot ([-1-x]^2 + 2[-1-x] + 5) \\
&= -\frac{1}{8} \cdot (2-x) \cdot (-x-2) \cdot (x^2+4) \\
&= -\frac{1}{8} \cdot (x^2-4) \cdot (x^2+4) \\
&= -\frac{1}{8} \cdot (x^4 - 16)
\end{aligned}$$

$$f(-1+x) = f(-1-x)$$

$\rightarrow$ Die Funktion ist achsensymmetrisch zu $x = -1$.

(f)



3. (a) Den gegebenen x-Wert $x = 0$ in den Funktionsterm einsetzen:

$$f(0) = \frac{1}{36} \cdot 0^4 - \frac{8}{27} \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + 4 = 4$$

Man erkennt, dass der Parameter c für $x = 0$ keine Auswirkung mehr hat, da $c \cdot 0$ stets den Wert Null hat. Somit gilt unabhängig von c: $f(0) = 4$.

(b) Erste Ableitung berechnen und zu Null setzen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{9}x^3 - \frac{8}{9}x^2 + 2c \cdot x \\ f'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Auch hier sieht man, dass der Parameter c für $x = 0$ keinen Einfluss auf den Funktionswert hat. Deshalb haben alle Graphen der Schar bei $x = 0$ eine waagrechte Tangente.

(c) Es kann sich nur um einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt handeln. Dies kann man anhand der 2. Ableitung unterscheiden.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{3}x^2 - \frac{16}{9}x + 2c \\ f''(0) &= 2c \end{aligned}$$

Für $c < 0$: $f''(0) < 0$ $\rightarrow$ Hochpunkt

Für $c = 0$: $f''(0) = 0$ $\rightarrow$ Terrassenpunkt

Für $c > 0$: $f''(0) > 0$ $\rightarrow$ Tiefpunkt

(d) i. Forderung einer Nullstelle $P(6|0)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{36} \cdot 6^4 - \frac{8}{27} \cdot 6^3 + c \cdot 6^2 + 4 \\ 0 &= 36 - 64 + 36c + 4 \\ c &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ii. Waagerechte Tangente → 1. Ableitung ist Null:

$$\begin{aligned} f'(6) &= 0 \\ \frac{1}{9}\cdot 6^3 - \frac{8}{9}\cdot 6^2 + 2c\cdot 6 &= 0 \\ 24 - 32 + 12c &= 0 \\ c &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

iii. Waagerechte Tangente → 1. Ableitung ist Null:

$$\begin{aligned} f'(2) &= 0 \\ \frac{1}{9}\cdot 2^3 - \frac{8}{9}\cdot 2^2 + 2c\cdot 2 &= 0 \\ \frac{8}{9} - \frac{32}{9} + 4c &= 0 \\ c &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

iv. Steigung $m = -1$ → 1. Ableitung gleich -1:

$$\begin{aligned} f'(3) &= -1 \\ \frac{1}{9}\cdot 3^3 - \frac{8}{9}\cdot 3^2 + 2c\cdot 3 &= -1 \\ 3 - 8 + 6c &= -1 \\ c &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(e) Aus der Teilaufgabe (d) ist bereits bekannt dass es Extrema bei $x_1 = 6$ und $x_2 = 2$ gibt. Für die 2. Ableitung gilt:

$$\begin{aligned} f''(6) &= \frac{8}{3} \qquad > 0 \\ f''(2) &= -\frac{8}{9} \qquad < 0 \end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$\text{Tiefpunkt: } P_1(6|0) \qquad \text{Hochpunkt } P_2\left(2|\frac{128}{27}\right)$$

Untersuchung ob die 1. Ableitung noch mehr Nullstellen hat geschieht mit der Linearfaktorzerlegung:

$$\begin{aligned} (\frac{1}{9}x^3 - \frac{8}{9}x^2 + \frac{4}{3}x) : (x-6) &= \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x \\ (\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x) : (x-2) &= \frac{1}{9}x \end{aligned}$$

Damit lautet die erste Ableitung in Linearfaktoren zerlegt:

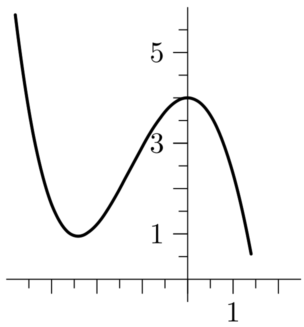
$$f'(x) = (x-6)\cdot(x-2)\cdot\frac{1}{9}x$$

Man erkennt sofort, dass es neben den Nullstellen $x_1 = 6$ und $x_2 = 2$ noch eine weitere Nullstelle $x_3 = 0$ gibt.
Da $f''(0) = \frac{4}{3}$ größer als Null ist gilt:

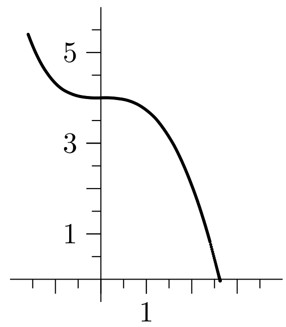
$$\text{Tiefpunkt } P_3(0|4)$$

(f) Da es sich bei der Funktion um eine Schar handelt und nicht vorgegeben ist für welchen Parameterwert der Graph gezeichnet werden soll müssen mehrere Graphen skizziert werden. Dies kann natürlich auch in ein Koordinatensystem erfolgen.

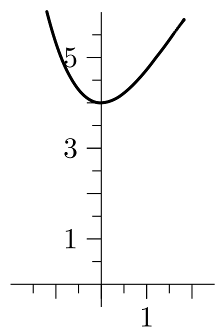
Parameter $c < 0$
(c=−1,4)



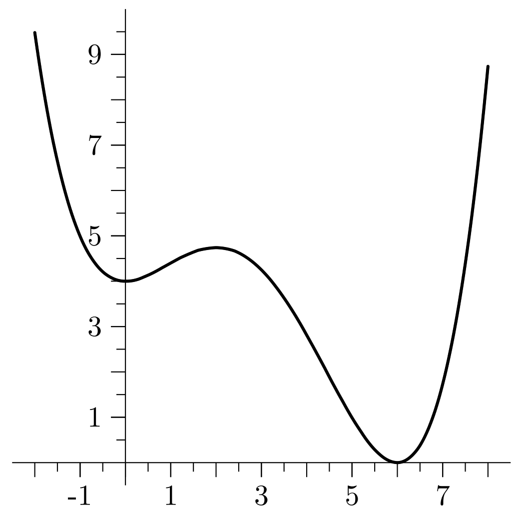
Parameter $c = 0$



Parameter $c > 0$
(c=1,0)



Parameter $c = \frac{2}{3}$



8 Lineare Gleichungssysteme

8.1 Begriffe

Allgemeine Form eines Gleichungssystems bestehend aus drei Gleichungen und drei Unbekannten:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

- Ein lineares Gleichungssystem besteht allgemein formuliert aus m Gleichungen und n Unbekannten.
  - Systeme, bei denen die Zahl der Gleichungen kleiner als die Zahl der Unbekannten sind ($m < n$) heißen **unterbestimmt**.
  - Systeme mit einer größeren Anzahl Gleichungen als Unbekannten ($m > n$) nennt man **überbestimmt**.
- Bei Gleichungssystemen werden die **Unbekannten** üblicherweise anstelle von x, y, z, ... mit $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$, ... bezeichnet, um die Ausbaufähigkeit der Lösungsverfahren auf beliebig große Systeme ausdehnen zu können.
- Die **Gesamtheit aller Unbekannten** x_1, x_2, x_3, ... eines Gleichungssystems wird als **eine Variable** angesehen.
  D. h. ein Lösungselement eines Gleichungssystems mit drei Unbekannten beinhaltet stets eine x_1- und eine x_2- und eine x_3-Komponente.
- Die Faktoren $\mathbf{a_{11}}$, $\mathbf{a_{12}}$, $\mathbf{a_{13}}$, $\mathbf{a_{21}}$, ... vor den Unbekannten sind **Konstanten mit Doppelindizes**.
  Der Doppelindex gibt Auskunft über die Stellung der Konstanten a im Gleichungssystem. So steht die Zahl a_{32} in der dritten Gleichung bei der zweiten Unbekannten als Koeffizient.
- Für die vereinfachte Darstellung von linearen Gleichungssystemen gibt es zwei Möglichkeiten:
  - Es wird nur die linke Seite des Gleichungssystems in einer **Koeffizientenmatrix** erfasst:
    $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
  - Das gesamte Gleichungssystem wird in einer **erweiterten Koeffizientenmatrix** dargestellt (nur aus ihr kann man das Gleichungssystem auch wieder in der ausführlichen Form erstellen):
    $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

8.2 Lösungsverfahren für Systeme aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten

8.2.1 Einsetzverfahren

Die erste Gleichung wird nach einer der beiden Unbekannten (z. B. x_1) aufgelöst. Der damit erhaltene Term wird in der zweiten Gleichung für diese Unbekannte eingesetzt.

Beispiel:
Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcl} (I) & 8x_1 + 2x_2 & = & 80 \\ (II) & -3x_1 + 5x_2 & = & -7 \end{array}$$

Gleichung (I) nach einer Unbekannten (hier z. B. x_2) auflösen:

$$x_2 = 40 - 4x_1 \qquad \clubsuit$$

Diesen Ausdruck in (II) einsetzen:

$$-3x_1 + 5 \cdot (40 - 4x_1) = -7$$

Der Term muss nur noch ausmultipliziert und nach x_1 aufgelöst werden:

$$\begin{array}{rcl} -3x_1 + 200 - 20x_1 & = & -7 \\ -23x_1 & = & -207 \\ x_1 & = & 9 \end{array}$$

Den Wert von x_1 in $\clubsuit$ einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & 40 - 4 \cdot 9 \\ x_2 & = & 4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{(9, 4)\}}}$$

8.2.2 Gleichsetzungsverfahren

Beide Gleichungen werden nach derselben Unbekannten aufgelöst und die rechten Seiten der aufgelösten Gleichungen werden gleichgesetzt.

Beispiel:
Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcl} (I) & 12x_1 - 8x_2 & = & 56 \\ (II) & 2x_1 + 11x_2 & = & -3 \end{array}$$

Beide Gleichungen nach einer Unbekannten (hier z. B. x_1) auflösen:

$$\begin{array}{lrcl} \text{aus } (I): & x_1 & = & \frac{14}{3} + \frac{2}{3}x_2 \\ \text{aus } (II): & x_1 & = & -\frac{3}{2} - \frac{11}{2}x_2 \end{array}$$

Beide Terme gleichsetzten und nach x_2 auflösen:

$$\begin{aligned}
\frac{14}{3}+\frac{2}{3}x_2 &= -\frac{3}{2}-\frac{11}{2}x_2\\
\left(\frac{8}{12}+\frac{11}{2}\right)x_2 &= -\frac{3}{2}-\frac{56}{12}\\
74x_2 &= -74\\
x_2 &= -1
\end{aligned}$$

Wert von x_2 in einen der obigen Ausdrücke für x_1 einsetzen:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{14}{3}+\frac{2}{3}\cdot(-1)\\
x_1 &= 4
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L}=\{(4,-1)\}}}$$

8.2.3 Additionsverfahren

Der Grundgedanke dieses Verfahrens ist, dass die Summer zweier Gleichungen mit den Lösungen (x_1, x_2) ebenfalls diese Lösung haben muss. Deshalb wird versucht die beiden Gleichungen derart zu addieren, dass dabei eine Unbekannte wegfällt (man sagt auch: eine Unbekannte wird *eliminiert*).

Die nachfolgenden drei Beispiele demonstrieren, dass ein Gleichungssystem genau eine, keine oder auch unendlich viele Lösungen haben kann. In den beiden letzten Fällen spricht man auch von einem **zerfallenden System**, welches entsteht, wenn nur die linken Seiten bzw. die gesamten Gleichungen Vielfache voneinander sind.

Beispiel 1:
Gesucht sei die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{lrcl}
(I) & 6x_1+3x_2 &=& 147\\
(II) & 3x_1+2x_2 &=& 96
\end{array}$$

Nun muss überlegt werden welche Vielfachen der beiden Zeilen addiert werden müssen damit eine Unbekannte eliminiert wird. Hier gibt es mehrere Möglichkeiten:

- Elimination von x_1: $(I)+(-2)\cdot(II)$ oder $(-0,5)\cdot(I)+(II)$
- Elimination von x_2: $(I)+(-1,5)\cdot(II)$ oder $(-\frac{2}{3})\cdot(I)+(II)$

Hier werde die erste Möglichkeit $(I)+(-2)\cdot(II)$ zur Elimination von x_1 gewählt:

$$\begin{array}{lrcl}
(I) & 6x_1+3x_2 &=& 147\\
(-2)\cdot(II) & -6x_1-4x_2 &=& -192\\
\hline
 & -x_2 &=& -45\\
 & \Rightarrow \quad x_2 &=& 45
\end{array}$$

Der Wert von x_2 kann nun in eine der beiden gegebenen Gleichungen eingesetzt werden (hier in (I)). Diese muss anschließend nach x_1 aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} 6x_1 + 3 \cdot 45 &= 147 \\ x_1 &= 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{(2, 45)\}}}$$

Beispiel 2:
Gesucht sei die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{lrcl} (I) & x_1 - 4x_2 & = & 9 \\ (II) & -2x_1 + 8x_2 & = & 7 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lrcl} 2 \cdot (I) & 2x_1 - 8x_2 & = & 18 \\ (II) & -2x_1 + 8x_2 & = & 7 \\ \hline & 0 & = & 25 \end{array}$$

Man erhält einen Widerspruch. Damit hat das Gleichungssystem keine Lösung!

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{\ \}}}$$

Beispiel 3:
Gesucht sei die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{lrcl} (I) & -4x_1 + 12x_2 & = & -2 \\ (II) & 6x_1 - 18x_2 & = & 3 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lrcl} 1,5 \cdot (I) & -6x_1 + 18x_2 & = & -3 \\ (II) & 6x_1 - 18x_2 & = & 3 \\ \hline & 0 & = & 0 \end{array}$$

Man bekommt eine wahre Aussage. Das System ist unterbestimmt und man bekommt unendlich viele Lösungen, wobei der Wert der einen Variablen stets von der anderen abhängt. Z. B. aus Gleichung (I):

$$x_2 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3}x_1$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \left\{ (x_1, x_2) \,|\, x_1 \in \mathbf{R} \wedge x_2 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3}x_1 \right\}}}$$

8.2.4 Graphische Lösung

Jede Gleichung des Systems wird als eine Gleichung einer linearen Funktion angesehen. Damit ist der Graph einer jeden Funktion eine Gerade. Der Schnittpunkt dieser Geraden ist die gesuchte Lösung. Existiert kein Schnittpunkt, so ist die Lösungsmenge eine leere Menge. Liegen die beiden Geraden aufeinander, so gibt es unendlich viele Lösungen.

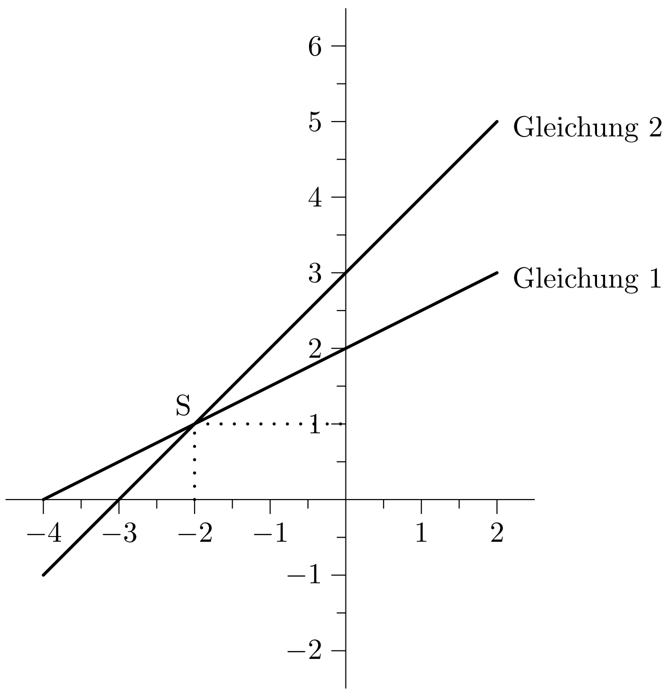
Beispiel:
Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcl} (I) & 5x_1 - 10x_2 & = & -20 \\ (II) & -6x_1 + 6x_2 & = & 18 \end{array}$$

Beide Gleichungen nach x_2 umstellen:

$$\begin{array}{lrcl} (I) & x_2 & = & 0,5x_1 + 2 \\ (II) & x_2 & = & x_1 + 3 \end{array}$$

Die Graphen beider Gleichungen in ein x_1x_2-Koordinatensystem eintragen und die Koordinaten des Schnittpunktes ablesen:



Der Schnittpunkt liegt bei $S(-2|1)$.

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{(-2,1)\}}}$$

Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die Lösungsmengen nachfolgender linearer Gleichungssysteme. Variieren Sie bei den Aufgaben das Lösungsverfahren.

a) $x_1 + x_2 = 5$
$4x_1 - 3x_2 = -1$

b) $5x + 6y = 1$
$-8x + 5y = 1$

c) $6x_1 + x_2 + 9 = 0$
$7x_1 - 4x_2 + 26 = 0$

d) $2a + 4b - 3 = 0$
$-6a + 10b = 2$

e) $26x_1 - 9x_2 = 82$
$39x_1 - \frac{27}{2}x_2 = 71$

f) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = \frac{3}{4}$
$2x + 3y = 9$

g) $3x_1 - 4x_2 - 19 = 0$
$5x_1 - 37 = 12x_2$

h) $x_1 + x_2 = 78$
$-3x_1 - 3x_2 = -234$

i) $x_1 - x_2 = -\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}x_1 - x_2 = -2$

j) $8x - 2y = -14$
$7x + \frac{3}{7}y = 9$

Lösungen:

a) $\mathbf{L} = \{(2, 3)\}$

b) $\mathbf{L} = \left\{\left(-\frac{1}{73}, \frac{13}{73}\right)\right\}$

c) $\mathbf{L} = \{(-2, 3)\}$

d) $\mathbf{L} = \left\{\left(\frac{1}{22}, \frac{5}{22}\right)\right\}$

e) $\mathbf{L} = \{\ \}$

f) $\mathbf{L} = \{(0, 3)\}$

g) $\mathbf{L} = \{(5, -1)\}$

h) $\mathbf{L} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbf{R} \wedge x_2 = 78 - x_1\}$

i) $\mathbf{L} = \left\{\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$

j) $\mathbf{L} = \left\{\left(\frac{42}{61}, \frac{595}{61}\right)\right\}$

8.3 Lösungsverfahren für Systeme aus m Gleichungen mit n Unbekannten

8.3.1 Reduktion eines 3-3- auf ein 2-2-System

Ist mindestens ein Koeffizient des Gleichungssystems Null, so kann die Gleichung mit diesem „Null“-Koeffizienten nach einer der beiden anderen Unbekannten aufgelöst, und das Ergebnis in die beiden restlichen Gleichungen eingesetzt werden.
Dieses 2-2-System kann nun mit den in Kapitel 8.2 vorgestellten Verfahren gelöst werden.

Beispiel:
Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcl} (I) & 8x_1 \qquad - 2x_3 & = & -30 \\ (II) & 2x_1 + 5x_2 + 11x_3 & = & -9 \\ (III) & -x_1 + 3x_2 - 6x_3 & = & 16 \end{array}$$

Gleichung (I) nach x_3 auflösen:

$$x_3 = 4x_1 + 15 \qquad \clubsuit$$

Diesen Ausdruck in die Gleichungen (I) und (II) einsetzen:

$$\begin{array}{lrcll} \text{in } (II) & 2x_1 + 5x_2 + 11 \cdot (4x_1 + 15) & = & -9 & \\ & 46x_1 + 5x_2 & = & -174 & \bigstar \\ & & & & \\ \text{in } (III) & -x_1 + 3x_2 - 6 \cdot (4x_1 + 15) & = & 16 & \\ & -25x_1 + 3x_2 & = & 106 & \blacklozenge \end{array}$$

Die beiden Gleichungen $\bigstar$ und $\blacklozenge$ bilden nun ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und den beiden Unbekannten x_1 und x_2. Dies kann nun z. B. mit dem Additionsverfahren gelöst werden.

$$\begin{array}{lrcl} 3 \cdot \bigstar & 138x_1 + 15x_2 & = & -522 \\ (-5) \cdot \blacklozenge & 125x_1 - 15x_2 & = & -530 \\ \hline & 263x_1 & = & -1052 \\ & \Rightarrow \quad x_1 & = & -4 \end{array}$$

Der Wert von x_1 kann nun in $\bigstar$ oder $\blacklozenge$ eingesetzt werden (hier in $\blacklozenge$) um x_2 zu berechnen, und anschließend noch in $\clubsuit$ um x_3 zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcl} -25 \cdot (-4) + 3x_2 & = & 106 \\ x_2 & = & 2 \\ & & \\ x_3 & = & 4 \cdot (-4) + 15 \\ x_3 & = & -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{(-4, 2, -1)\}}}$$

8.3.2 Determinantenmethode

Berechnung zweireihiger Determinanten

Zu lösen sei ein 2-2-Gleichungssystem der Art:

$$\begin{array}{llcl} (I) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ (II) & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array}$$

Dazu wird zunächst die Unbekannte x_1 mit dem Additionsverfahren (siehe Seite 156) eliminiert:

$$\begin{array}{llcll} (-a_{21}) \cdot (I): & -a_{21}a_{11}x_1 - a_{12}a_{21}x_2 & = & -a_{21}b_1 & \\ a_{11} \cdot (II): & a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 & = & a_{11}b_2 & \\ \hline \sum & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 & = & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 & \spadesuit \end{array}$$

Nun wird - ausgehend von den gegebenen Gleichungen - die Unbekannte x_2 eliminiert:

$$\begin{array}{llcll} a_{22} \cdot (I): & a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 & = & a_{22}b_1 & \\ (-a_{12}) \cdot (II): & -a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 & = & -a_{12}b_2 & \\ \hline \sum & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 & = & a_{22}b_1 - a_{12}b_2 & \diamondsuit \end{array}$$

Damit kann das gegebene Gleichungssystem durch das folgende, äquivalente System ersetzt werden:

$$\begin{array}{llcl} (I^*) & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 & = & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \\ (II^*) & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 & = & a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \end{array}$$

Um das Berechnen dieser Ausdrücke etwas übersichtlicher zu gestalten werden abkürzende Schreibweisen, die zweireihigen Determinanten, eingeführt. Dazu werden die Koeffizienten a_{11}, a_{12}, a_{21} und a_{22} in einem quadratischen Zahlenschema angeordnet.

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = D$$

In diesem Schema unterscheidet man zwei Diagonalen:

- die Hauptdiagonale wird durch die Zahlen a_{11} und a_{22} gebildet und verläuft von links oben nach rechts unten
- die Nebendiagonale beinhaltet die Zahlen a_{12} und a_{21} und geht von links unten nach rechts oben.

Ersetzt man in D die Zahlen der „x_1-Spalte“ durch die rechte Seite des ursprünglich gegebenen Gleichungssystems (also durch b_1 und b_2) so erhält man die Determinante D_1. Entsprechend erhält man D_2 durch Austausch der „x_2-Spalte“.

$$b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = D_1$$

$$b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = D_2$$

Damit kann das äquivalente Gleichungssystem bestehend aus $(I)^*$ und $(II)^*$ in folgende Kurzform umgeschrieben werden, aus der sich x_1 und x_2 leicht bestimmen lassen:

$$\begin{array}{lcl} Dx_1 = D_1 & & x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ & \Rightarrow & \\ Dx_2 = D_2 & & x_2 = \dfrac{D_2}{D} \end{array}$$

Cramersche Regeln für ein 2-2-Gleichungssystem:

1. Fall: $\mathbf{D \neq 0}$
   Das System ist **eindeutig lösbar**, da dann der Nenner obiger Gleichungen stets ungleich Null ist.

2. Fall: $\mathbf{D = 0 \wedge D_1 = 0 \wedge D_2 = 0}$
   Das System hat **unendlich viele Lösungen**, da die Gleichungen $0 \cdot x_1 = 0$ und $0 \cdot x_2 = 0$ für alle reellen x_1 und x_2 erfüllt sind.

3. Fall: $\mathbf{D = 0 \wedge (D_1 \neq 0 \vee D_2 \neq 0)}$
   Das System hat **keine Lösung**, da es keine reelle Zahl gibt, welche die Bedingung $0 \cdot x_1 \neq 0$ bzw. $0 \cdot x_2 \neq 0$ erfüllt.

Berechnung dreireihiger Determinanten

Dieses Verfahren kann ohne Probleme auch auf größere Gleichungssysteme ausgedehnt werden. Die Berechnung der Determinanten erfolgt dann mit Hilfe der Regel von Sarrus (siehe Seite 163) oder durch Entwicklung nach der ersten Spalte (siehe Seite 164).

Für 3-3-Gleichungssysteme gilt:
Das Gleichungssystem hat dann, und nur dann genau eine Lösung
$\mathbf{L} = (x_1, x_2, x_3)$, wenn

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Dann lassen sich die Unbekannten folgendermaßen berechnen:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

Hinweis:
3-3-Systeme lassen sich nur dann eindeutig lösen falls $D \neq 0$. in allen anderen Fällen wird empfohlen die Lösungsmenge mit dem Gaußschen Algorithmus (siehe Seite 165) zu ermitteln!

Betrag einer Matrix mit der „Regel von Sarrus“

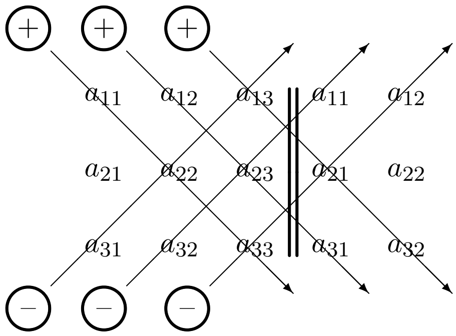
Die Regel von Sarrus gilt nur für dreireihige Determinanten!

Berechnet man bei der Entwicklung nach der ersten Zeile auch noch die Unterdeterminanten, so erhält man (am Ende durch Vertauschen der Reihenfolge einiger Summanden und Faktoren) folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

Zu diesem Ergebnis kommt man auch unmittelbar wenn man die erste und zweite Spalte noch einmal neben die Determinante schreibt (sozusagen als Hilfsspalten). Nun addiert man die Produkte der drei Hauptdiagonalen und subtrahiert davon die Summe der Produkte der in den drei Nebendiagonalen stehenden

Elemente.



Beispiel:
Zu bestimmen sei die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Man erweitert die Matrix um die „Hilfsspalten“:

$$\begin{array}{ccc||cc} 10 & 8 & 6 & 10 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 9 & 3 & 2 \end{array}$$

Nun wird die Summe der Produkte der drei Hauptdiagonalen berechnet und davon die Summe der Produkte der drei Nebendiagonalen abgezogen:

$$\begin{aligned} D &= \underbrace{[(10 \cdot 5 \cdot 9) + (8 \cdot 1 \cdot 3) + (6 \cdot 3 \cdot 2)]}_{\text{aus Hauptdiagonalen}} - \underbrace{[(3 \cdot 5 \cdot 6) + (2 \cdot 1 \cdot 10) + (9 \cdot 3 \cdot 8)]}_{\text{aus Nebendiagonalen}} \\ &= [450 + 24 + 36] - [90 + 20 + 216] \\ &= 184 \end{aligned}$$

Betrag einer Matrix durch Entwicklung nach der ersten Spalte

Im Gegensatz zur Regel von Sarrus kann dieses Verfahren (durch rekursives Anwenden) für beliebig große Determinanten verwendet werden. Allerdings wächst der dafür benötigte Rechenaufwand sehr schnell an.

Um den Betrag einer Determinante zu berechnen nehme man der Reihe nach die Koeffizienten der ersten Spalte. Man beginnt mit dem obersten, schreibt ihn an und streicht dann (gedanklich) die zugehörige Zeile und die Spalte aus der Determinante. Übrig bleibt eine Unterdeterminante mit n-1 Spalten und m-1 Zeilen, deren Betrag man mit dem bereits angeschriebenen Koeffizienten multipliziert.
Im nächsten Schritt schreibt man den zweiten Koeffizienten von oben der ersten Spalte an, streicht wieder die zugehörige Zeile und Spalte und multipliziert den Betrag der übrig gebliebenen Unterdeterminante mit dem angeschriebenen

Koeffizienten. Dieses Produkt wird vom ersten Produkt abgezogen.
Im Laufe der weiteren Berechnung werden die folgenden Produkte abwechselnd addiert und subtrahiert.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$D = a_{11} \cdot U_{11} - a_{21} \cdot U_{21} + a_{31} \cdot U_{31}$$

Beispiel:
Zu bestimmen sei die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} D &= 10 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 10 \cdot (5 \cdot 9 - 2 \cdot 1) - 3 \cdot (8 \cdot 9 - 2 \cdot 6) + 3 \cdot (8 \cdot 1 - 5 \cdot 6) \\ &= 10 \cdot 43 - 3 \cdot 60 + 3 \cdot (-22) \\ &= 184 \end{aligned}$$

8.3.3 Gaußsches Eliminationsverfahren

Beim diesem Verfahren wird nur mit der erweiterten Koeffizientenmatrix (siehe Seite 154) des Gleichungssystems gearbeitet.

Ziel ist es, die erweiterte Koeffizientenmatrix so umzuformen, dass man eine obere Dreiecksmatrix erhält. Bei einem 3-3-System hätte diese folgende Form ($*$ steht für beliebige Zahlen):

$$\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}$$

Um dies zu erreichen sind folgende Rechenoperationen erlaubt:

- Vertauschung zweier Zeilen
- Addition eines geeigneten Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile
- Multiplikation einer (kompletten) Zeile mit einer von Null verschiedenen Zahl

Beispiel:
Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gaußschen Lösungsverfahrens:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & -x_2 & & = & -8 \\ 2x_1 & & -2x_3 & = & -12 \\ & x_2 & +x_3 & = & 24 \end{array}$$

Aufstellen der erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 2 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & 24 \end{array}\right.$$

Es ergibt sich folgender Rechenweg:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 2 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & 24 \end{array} \quad \underset{\Rightarrow}{\text{(II) und (III) tauschen}} \quad \begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 24 \\ 2 & 0 & -2 & -12 \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\underset{\Rightarrow}{(-2)\cdot(I)+(III)} \quad \begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array} \quad \underset{\Rightarrow}{(-2)\cdot(II)+(III)} \quad \begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & -4 & -44 \end{array}$$

Von unten nach oben auflösen:

$$\begin{array}{lrclcl} \text{Zeile 3:} & -4\cdot x_3 = -44 & \rightarrow & & & x_3 = 11 \\ \text{Zeile 2:} & 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = 24 & \rightarrow & 1\cdot x_2 + 1\cdot 11 = 24 & \rightarrow & x_2 = 13 \\ \text{Zeile 1:} & 1\cdot x_1 - 1\cdot x_2 = -8 & \rightarrow & 1\cdot x_1 - 1\cdot 13 = -8 & \rightarrow & x_1 = 5 \end{array}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{(5, 13, 11)\}}}$$

8.4 Übungsaufgaben

1. Geben Sie mindestens vier Lösungen nachfolgender Gleichung an!

$$5x - y = -1 \qquad x \in R; \qquad y \in R$$

2. Geben Sie zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen an, die das Zahlenpaar [2; 3] als eine Lösung haben!

3. Skizzieren Sie in einem Koordinatensystem ein lineares Gleichungssystem, das keine Lösung hat!

4. Woran erkennt man an den Koeffizienten, dass ein 2-2-Gleichungssystem genau eine Lösung besitzt?

5. Lösen Sie das nachfolgende Gleichungssystem graphisch!

$$\begin{array}{rcrcr} y & = & x & + & 1 \\ y & = & 2x & + & 1 \end{array}$$

6. Lösen Sie das Gleichungssystem rechnerisch!

$$\begin{array}{rcrl} x & + & y & = 2 \\ 2x & + & 2y & = 7 \end{array}$$

7. Gesucht ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & -1 \\ 5x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 1 \end{array}$$

8. Bestimmen Sie den Parameter a so, dass das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist:

$$\begin{array}{rrrcr} 5x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & +ax_2 & +\frac{3}{2}x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = & 2 \end{array}$$

9. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem, wobei m eine feste reelle Zahl sei:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & mx_3 & = & -1 \\ 4x_1 & + & 9x_2 & + & m^2x_3 & = & 1 \end{array}$$

   (a) Für welche Werte von m hat das System keine eindeutige Lösung?
   (b) Setzen Sie $m = 4$ und lösen Sie das erhaltene System mit der Determinatenmethode.
   (c) Lösen Sie das System für $m = -1$ mit dem Gaußschen Algorithmus.
   (d) Für welche Werte von m gilt $D = 6$?

10. Die Differenz zweier Zahlen beträgt 27. Multipliziert man die erste Zahl mit 2 und die zweite Zahl mit 3, so ist die Differenz 41. Bestimmen Sie die Zahlen.

11. Ein Textilgeschäft bezieht 200 Hemden und 250 Pullover, die laut Rechnung zusammen 24.500 Euro kosten. Die Hemden werden mit 20%, die Pullover mit 40% Aufschlag verkauft. Dabei werden insgesamt 31.900 Euro eingenommen. Wie teuer war ein Hemd und ein Pullover im Einkauf?

12. Für den Bau eines Hauses benötigt eine Familie einen Zwischenfinanzierungskredit von 120.000 Euro. Sie erhält ihn von drei verschiedenen Banken B_1, B_2 und B_3 zu jeweils 5%, 10% und 8% Zinsen.
    Nach einem Jahr entrichtet sie insgesamt an die drei Banken 8.000 Euro Zinsen. Im zweiten Jahr erhöht B_1 den Zinssatz um 1% und B_2 um 0,5%, während B_3 den alten Zinssatz beibehält. Am Ende des zweiten Jahres sind insgesamt 8.650 Euro Zinsen fällig. (Hinweis: während der betrachteten Laufzeit erfolgt keine Tilgung!)
    Welche Beträge wurden von den drei Banken ausgeliehen?

Lösungen

1. Angabe umstellen ($y = 5x + 1$) und beliebige x-Werte einsetzten.
2. Allgemein: $y = mx + t \qquad \rightarrow \qquad 3 = m \cdot 2 + t$. Nun entweder m oder t frei wählen und anderen Parameter entsprechend bestimmen.
3. Es handelt sich um zwei beliebige parallele Geraden.
4. Die zwei Zeilen sind keine Vielfachen voneinander.
5. Zwei Geraden im Koordinatensystem mit Schnittpunkt $S(0|1)$.
6. Das Gleichungssystem hat keine Lösung!
7. Die Determinante des Systems kann auf zwei Arten berechnet werden:

   (a) Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} D &= \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 5 & -1 \end{array}\right| \\ &= [2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot (-1)] - [5 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3] \\ &= 9 \end{aligned}$$

   (b) Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$\begin{aligned} D &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1) - 1 \cdot (3 \cdot 2 - (-1) \cdot 1) + 5 \cdot (3 \cdot 1 - 1 \cdot 1) \\ &= 9 \end{aligned}$$

   Da $D \neq 0$ ist hat das System eine eindeutige Lösung.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 9 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{9}{9} = 1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{9} = 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -18 \qquad \Rightarrow \qquad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-18}{9} = -2$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{(1, 0, -2)\}}}$$

8. Bestimmung der Determinante des gegebenen Systems:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & a & \frac{3}{2} \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 5 \cdot a \cdot (-2) + (-1) \cdot \frac{3}{2} \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \cdot (-2) - (-2) \cdot a \cdot 2 - (-2) \cdot \frac{3}{2} \cdot 5 - (-2) \cdot 3 \cdot (-1) \\ &= -6a \end{aligned}$$

Es muss gelten:

$$D \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad a \neq 0$$

9. (a) Keine Lösung falls Determinante $D = 0$ d. h. für $m_1 = 2$ und $m_2 = 3$.
   (b) $x_1 = 10 \qquad x_2 = -15 \qquad x_3 = 6$
   (c) $x_1 = 0 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 1$
   (d) $m_1 = 0 \qquad m_2 = 5$

10. Erste Zahl $a = 40$ und zweite Zahl $b = 13$.

11. Ein Hemd kostet 60 Euro und ein Pullover kostet 50 Euro im Einkauf.

12. Bank 1 verleiht 60.000 Euro, von Bank 2 stammen 10.000 Euro und Bank 3 vergab einen Kredit über 50.000 Euro. ($D = -0,00035$, $D_1 = -21$, $D_2 = -3,5$, $D_3 = -17,5$)

Index