Mathematik

FOS 11. Jahrgangsstufe (technisch)

Stand: 23. Juli 2004

Kontakt und weitere Infos:
www.schule.barmetler.de

Inhaltsverzeichnis

1 Wiederholung

1.1 Bruchrechnen

Für natürliche Zahlen m und n ist durch das Symbol $\frac{m}{n}$ ein Bruch mit dem **Zähler** m und dem **Nenner** n festgelegt.

Zwei Brüche sind **gleichnamig**, wenn sie den gleichen Nenner haben.

Addition und Subtraktion

Gleichnamige Brüche:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

Ungleichnamige Brüche:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

- Für alle Brüche einen gemeinsamen Nenner suchen, indem man das *kleinste gemeinsame Vielfache* (kgV) der einzelnen Nenner bildet.
- Alle Brüche auf diesen Hauptnenner erweitern.
- Die Brüche zu einem einzigen Bruch zusammenfassen. Dabei evtl. Klammern setzen!
- Den Zähler des Bruchs bei Bedarf ausmultiplizieren und zusammenfassen.

Multiplikation

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Sonderfall:

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{ac}{b}$$

- Die zwei Zähler werden multipliziert und die zwei Nenner werden miteinander multipliziert.

Division

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Sonderfall:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

- Der erste Bruch wird mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multipliziert.
- Nach dem multiplizieren so weit wie möglich kürzen!

1.2 Wurzelrechnen

Definition:

- $\sqrt{a}$ ist diejenige nicht-negative Zahl, die mit sich selbst multipliziert a ergibt.
$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a \qquad a \in \mathbf{R}^+$$
- $\sqrt{a}$ existiert in den reellen Zahlen nur, wenn $a \geq 0$ gilt.
- $\sqrt{a}$ lässt sich oft nicht als rationale Zahl darstellen. Dann wird meist eine Näherung angegeben.
Für die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ wird beispielsweise die Näherung $1,414$ angegeben.
- Der Term unter dem Wurzelsymbol heißt **Radikand**.

Rechenregeln:

1. $a \cdot \sqrt{x} + b \cdot \sqrt{x} = (a+b) \cdot \sqrt{x}$
2. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
3. $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$ bzw. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
4. $\sqrt{a^2} = |a|$ z. B. $\sqrt{(-5)^2} = 5$
5. $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$

Definitionsmenge:

- Die Wurzel ist nur für nicht-negative Radikanden definiert. Evtl. muss mit Hilfe der Ungleichungslehre eine Einschränkung des Definitionsbereichs vorgenommen werden.
Beispiel:
$$f(x) = \sqrt{2x+6}$$
Der Radikand $2x+6$ muss positiv sein. Deshalb wird folgende Ungleichung aufgestellt:
$$2x + 6 \geq 0 \qquad \rightarrow \qquad x \geq -3$$
$$\mathbf{D} = \{x \in \mathbf{R} | x \geq -3\}$$

- Bei Termumformungen kann die Definitionsmenge verändert werden!
  Beispiel:
  $$T_1(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \qquad \mathbf{D_1} = \mathbf{R}^+$$
  Beim Term T_1 dürfen nur nicht negative Zahlen eingesetzt werden. Nach der Rechenregel 2 darf dieser Term aber umgeformt werden:
  $$T_1(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \qquad \rightarrow \qquad T_2(x) = \sqrt{x^2}$$
  Beim Term T_2 dürfen nun Werte aus ganz $\mathbf{R}$ eingesetzt werden: $\mathbf{D_2} = \mathbf{R}$!

Tipps:

- Man zerlegt den Radikand so in ein Produkt, dass quadratische Faktoren entstehen, aus denen dann die Wurzel gezogen werden kann.
  Beispiele:
  $$\sqrt{18x^3} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot x \cdot x^2} = 3x \cdot \sqrt{2x} \qquad x \in \mathbf{R}^+$$
  $$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = \sqrt{(a+b)^2} = |a+b|$$
- Soll eine Zahl unter eine Wurzel gezogen werden, so muss sie zunächst quadriert werden.
  Beispiele:
  $$3 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$$
  $$r \cdot 3 = \sqrt{3 \cdot r^2}$$
- Es können nur gleichartige Wurzelterme addiert oder subtrahiert werden! Evtl. muss erst teilweise radiziert werden.
  Beispiel:
  $$\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \quad (= \sqrt{50})$$
- Beim Multiplizieren, Dividieren und Potenzieren gibt es keine Probleme.
  Beispiel:
  $$\frac{\sqrt{8}\sqrt{a}^3}{\sqrt{2a}} = \sqrt{\frac{8a^3}{2a}} = \sqrt{4a^2} = 2a \qquad a \in \mathbf{R}^+$$

1.3 Potenzrechnen

In der Gleichung
a^n =Potenzwert
nennt man a die **Basis** und n den **Exponenten**.

Hat der Exponent den Wert Null, so ist definiert:

$$a^0 = 1$$

Rechenregeln:

- Multiplikation

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

- Division

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

- Potenz einer Potenz

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

- Negativer Exponent

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$
$$b^n = \frac{1}{b^{-n}}$$

1.4 Lösen von Gleichungen

Die Gleichung ist in der geforderten Variablen linear

1. Falls nötig, Klammern ausmultiplizieren.
2. Alle Terme, die die geforderte Variable enthalten nach links, die restlichen Terme nach rechts.
3. Geforderte Variable ggf. ausklammern.
4. Division durch Beifaktor der Variablen (Definitionsmenge beachten!)

Beispiel:
Lösen Sie die Gleichung $a = bx + c(x+1)$ (mit $b \neq -c$) nach x auf.

- Ausmultiplizieren

$$a = bx + cx + c$$

- ”x nach links”

$$bx + cx = a - c$$

- x ausklammern

$$x(b+c) = a - c$$

- Durch Beifaktor (hier die Klammer) dividieren

$$x = \frac{a-c}{b+c} \qquad b \neq -c$$

Die Gleichung ist in der geforderten Variablen von höherer Potenz

1. Alle Schritte genau so, als ob die geforderte Variable linear vorliegen würde.
2. Anschließend die entsprechende Wurzel ziehen.

Beispiel:
Lösen Sie die Gleichung $A = 2(r^3 + b)$ (mit A, b, $r > 0$, $A > 2b$) nach r auf.

- Ausmultiplizieren
$$A = 2r^3 + 2b$$
- r nach links"
$$2r^3 = A - 2b$$
- Durch Beifaktor dividieren
$$r^3 = \frac{A - 2b}{2}$$
- Wurzel ziehen
$$r = \sqrt[3]{\frac{a - 2b}{2}}$$

Die Variable steht im Nenner eines (oder mehrerer) Bruchterme

1. Falls nichts dagegen spricht (z. B. ein einfacherer Rechenweg) Gleichung mit Hauptnenner multiplizieren.
2. Anschließend die Schritte wie bei den Fällen oben beschrieben.

Beispiel:
Lösen Sie die Gleichung $a = \frac{bx}{cx-d}$ nach x auf.

- Gleichung mit Hauptnenner multiplizieren.
$$a \cdot (cx - d) = \frac{bx}{cx - d} \cdot (cx - d) \qquad \rightarrow \qquad a(cx - d) = bx$$
- Ausmultiplizieren
$$acx - ad = bx$$
- "x nach links"
$$acx - bx = ad$$
- x ausklammern
$$x(ac - b) = ad$$
- Durch Beifaktor dividieren
$$x = \frac{ad}{ac - b}$$

1.5 Übungen

Übungsaufgaben

1. Fassen Sie soweit als möglich zusammen:

   a) $6x + 11x + 7x - 2x$
   b) $8a + 22a - 16a$
   c) $14s + 2s + s - 7s$
   d) $3x^2 - 5x^2 - 19x^2 - x^2$
   e) $7a^3 + a^3 - 12a^3 + 9a^3$
   f) $5xy - 17xy + 12xy$
   g) $3(a + b) + 7(a + b)$
   h) $10(x - y) + 8(x - y) - 13(x - y)$
   i) $4(x^2 + 2) - 6(x^2 + 2) + (x^2 + 2)$
   j) $12(a^2 + b) - 38(a^2 + b) + 3(a^2 + b)$
   k) $-3(x - 1) - 4(x - 1) + 2(x - 1)$
   l) $x(a + b) + y(a + b)$

2. Fassen Sie soweit als möglich zusammen:

   a) $3x + 2y + 4x + 12y - 6x + 6y$
   b) $6a + 13b + 5a - 16b - 11a - 8b$
   c) $3a - 6b + 9a - 5b - 6a - 12b$
   d) $-5a + 6b - 7a - 2b + 12a - 4b$
   e) $12u - v + 5w - 13u + 2v - 6w$
   f) $4(a + b) + 3(x + y) + 5(a + b) - 6(x + y)$

3. Multiplizieren Sie aus:

   a) $3x(x - 4)$
   b) $4(x^2 - 5)$
   c) $a^2(4 - a + b)$
   d) $-2(x - y)$
   e) $xy(x + y)$
   f) $2ab^2(a^2 + b - 5)$

4. Multiplizieren Sie aus und fassen Sie zusammen:

   a) $3(2a + 3b) - 5(4a + 6b)$
   b) $5x(x + 1) - 2(x^2 + 3x)$
   c) $7b(a - 2b) - 2b(b - 7a)$
   d) $4x(2x + 3) - 2(5x^2 + 8x - 6)$
   e) $x(y + z) + y(x + z) + z(x + y)$
   f) $-2x^2y^3(x - y) + 3x^3y^2(x + y)$
   g) $2a^2(ab + 2b^2) - ba(3a^2 - ab)$
   h) $uv(v - 2u) + 2u^2(1 + v) - v^2(u + 3)$

5. Klammern Sie aus:

   a) $5x^2 - 10y$
   b) $2x^4 - 6x^3 + 8x^2$
   c) $64x^2y - 72xy^2$
   d) $56x^3 + 98x^2$
   e) $48abc + 72abd$
   f) $50x^2y^3 - 40x^3y^2$
   g) $68a^2b^4 + 85a^2b^3$
   h) $54 + 27x - 36x^2$

6. Multiplizieren Sie aus:

   a) $(a + 4)(b - 2)$
   b) $(a + 12)(a - 10)$
   c) $(3a - 4)(5a + 7)$
   d) $(2x - 1)(3x - 1)$
   e) $(5x - 10y)(5y - 10x)$
   f) $(rx + st)(rt + sx)$

7. Multiplizieren Sie aus:

   a) $(2a + 3b)(a - ab - b)$
   b) $(4 - x)(x^2 + 2x + 1)$
   c) $(y^2 - 3y + 9)(y + 3)$
   d) $(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x - 4)$
   e) $(a + ab - b)(b - ab + a)$
   f) $(a^2 - b^2)(a + 2b + a^2 - 2b^2)$

8. Multiplizieren Sie aus:

   a) $(x-1)(x+2)+(x+3)(x+4)-(x-5)(x-6)$
   b) $(x^2+3)(x+2)-(2x-7)(x^2+3x)-(x^2+2x-1)(x^2-2x-3)$
   c) $(2a-3b)(a^2-2b)+(a-5b^2)(3a-7b)-(a^2+2a)(b^2-b)$
   d) $(x^3+2x^2+4x+1)(2x-4)-(x^2+3x+12)(-x^2+3x-4)$

9. Multiplizieren Sie aus:

   a) $(3x-7)(2x+1)(4x+2)$
   b) $(-x^2+2x+1)(3x+2)(1-x)$
   c) $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$
   d) $(x+3)(x+3)(2x-1)(3x+5)$

10. Wenden Sie die entsprechende binomische Formel an:

    a) $(x+3)^2$
    b) $(5u+7v)^2$
    c) $(3y+12x)^2$
    d) $(4a-9b)^2$
    e) $(x^2-4)^2$
    f) $(10-8z)^2$
    g) $(3a+2b)(3a-2b)$
    h) $(x^2-3)(x^2+3)$
    i) $(xy-xz)(yx+zx)$

11. Faktorisieren Sie:

    a) x^2+6x+9
    b) $49x^2+112x+64$
    c) $4a^2-4ab+b^2$
    d) $16x^2-25$
    e) $144u^2-25v^2$
    f) $6x^2+60x+150$
    g) $2ab^2+12ab+18a$
    h) $48a^2c^2-75b^2c^2$
    i) $0,09-0,6v+v^2$
    j) $\frac{9}{625}r^2+\frac{4}{25}rs+\frac{4}{9}s^2$

12. Welcher Term muss in der Klammer stehen, um eine binomische Formel zu erhalten?

    a) $x^2+4x+[\ldots]$
    b) $9u^2-[\ldots]+16v^2$
    c) $x^2+[\ldots]+\frac{81}{16}$
    d) $[\ldots]-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}$

Lösungen

1. *a)* $22x$ *b)* $14a$ *c)* $10s$
   d) $-22x^2$ *e)* $5a^3$ *f)* 0
   g) $10a + 10b$ *h)* $5x - 5y$ *i)* $-x^2 - 2$
   j) $-23a^2 - 23b = -23(a^2 + b)$ *k)* $-5x + 5$ *l)* $(x + y)(a + b)$

2. *a)* $x + 20y$ *b)* $-11b$ *c)* $6a - 23b$
   d) 0 *e)* $-u + v - w$ *f)* $9(a + b) - 3(x + y)$

3. *a)* $3x^2 - 12x$ *b)* $4x^2 - 20$ *c)* $4a^2 - a^3 + a^2b$
   d) $-2x + 2y$ *e)* $x^2y + xy^2$ *f)* $2a^3b^2 + 2ab^3 - 10ab^2$

4. *a)* $-14a - 21b$ *b)* $3x^2 - x$ *c)* $21ab - 16b^2$
   d) $-2x^2 - 4x + 12$ *e)* $2xy + 2yz + 2xz$ *f)* $x^3y^3 + 2x^2y^4 + 3x^4y^2$
   g) $-a^3b + 5a^2b^2$ *h)* $2u^2 - 3v^2$

5. *a)* $5(x^2 - 2y)$ *b)* $2x^2(x^2 - 3x + 4)$ *c)* $8xy(8x - 9y)$
   d) $14x^2(4x + 7)$ *e)* $24ab(2c + 3d)$ *f)* $10x^2y^2(5y - 4x)$
   g) $17a^2b^3(4b + 5)$ *h)* $9(6 + 3x - 4x^2)$

6. *a)* $ab - 2a + 4b - 8$ *b)* $a^2 + 2a - 120$ *c)* $15a^2 + a - 28$
   d) $6x^2 - 5x + 1$ *e)* $125xy - 50x^2 - 50y^2$
   f) $r^2xt + rsx^2 + rst^2 + s^2tx$

7. *a)* $2a^2 - 2a^2b + ab - 3ab^2 - 3b^2$ *b)* $-x^3 + 2x^2 + 7x + 4$
   c) $y^3 + 27$ *d)* $x^4 - 4x^2 + 16x - 16$
   e) $a^2 + 2ab^2 - a^2b^2 - b^2$
   f) $a^3 + 2a^2b + a^4 - 3a^2b^2 - ab^2 - 2b^3 + 2b^4$

8. *a)* $x^2 + 19x - 20$
   b) $-x^4 - x^3 + 11x^2 + 28x + 3$
   c) $2a^3 - 9ab - 2a^2b + 6b^2 + 3a^2 - 17ab^2 + 35b^3 - a^2b^2$
   d) $3x^4 + 7x^2 - 38x + 44$

9. *a)* $24x^3 - 32x^2 - 50x - 14$ *b)* $3x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 5x + 2$
   c) $x^4 - 5x^2 + 4$ *d)* $6x^4 + 43x^3 + 91x^2 + 33x - 45$

10. *a)* $x^2 + 6x + 9$ *b)* $25u^2 + 70uv + 49v^2$ *c)* $9y^2 + 72xy + 144x^2$
    d) $16a^2 - 72ab + 81b^2$ *e)* $x^4 - 8x^2 + 16$ *f)* $100 - 160z + 64z^2$
    g) $9a^2 - 4b^2$ *h)* $x^4 - 9$ *i)* $x^2y^2 - x^2z^2$

11. *a)* $(x + 3)^2$ *b)* $(7x + 8)^2$ *c)* $(2a - b)^2$
    d) $(4x + 5)(4x - 5)$ *e)* $(12u + 5v)(12u - 5v)$ *f)* $6(x + 5)^2$
    g) $2a(b + 3)^2$ *h)* $3c^2(4a - 5b)(4a + 5b)$ *i)* $(0,3 - v)^2$
    j) $\left(\frac{3}{25}r + \frac{2}{3}s\right)^2$

12. *a)* 4 *b)* $24uv$ *c)* $\frac{9}{2}$ *d)* $\frac{x^2}{4}$