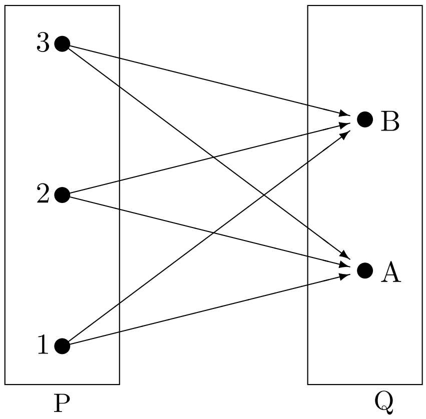
2 Von der Relation zur Funktion

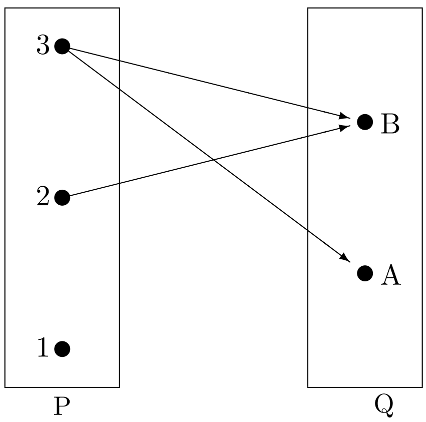
2.1 Relationen

Gegeben seien zwei Zahlenmengen $P = 1, 2, 3, 4$ und $Q = 5, 6, 7$. Setzt man alle Elemente der Menge P in Beziehung zu allen Elementen der Menge Q, nennt man dies eine Paarmenge $P \times Q$.



Paarmenge $P \times Q$

Stehen einzelne Elemente dieser Zahlenmengen in einer bestimmten Beziehung zueinander, so nennt man dies eine Relation.



Relation als Teilmenge der Paarmenge

> Gegeben sind zwei Mengen P und Q mit der Paarmenge $P \times Q$. Jede Teilmenge der Paarmenge $P \times Q$ heißt eine Relation (Beziehung) $P\rho Q$ (lies: P rho Q). Die Menge $G \subset P \times Q$ heißt Graph der Relation.

Der Graph einer Relation kann auf verschiedene Weise dargestellt werden:

- als Menge von Paaren: $G = (3 : A), (3; B), (2; B)$
- als Pfeildiagramm (siehe oben)
- als Punkte in einem Koordinatensystem mit der Menge P auf der x-Achse und der Menge Q auf der y-Achse
- als Tabelle

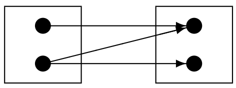
2.2 Funktionen

Für die Schüler gibt es nachfolgend ein Arbeitsblatt, das genau diesen Text enthält.

- Es wird von einer beliebigen Menge an Elementen ausgegangen. Man nennt dies die **Ausgangsmenge**.
- Nun wird definiert mit welchen Elementen der Ausgangsmenge gearbeitet werden soll bzw. darf
  $\rightarrow$ Festlegung der **Definitionsmenge**.
- Anschließend wird eine Zuordnungsvorschrift - auch **Funktion** genannt - erstellt oder vorgegeben.

  Sie legt fest welches Element der Zielmenge zu welchem Element der Definitionsmenge gehört.

  Diese Zuordnung kann auf verschiedene Arten erfolgen:

  - **mathematischer Ausdruck (=Funktion)**: $y = f(x), \quad x \in D$
  - **Pfeildiagramm** 
  - **Tabelle**

1	2	2	3	4
A	A	C	B	C

  - **Graph** 

  Jedem Element der Definitionsmenge darf **nur genau ein** Element aus der Zielmenge zugeordnet werden. Nicht mehr und nicht weniger!

- Ein Element der Wertemenge, das mindestens einem Element der Definitionsmenge zugeordnet wurde nennt man **Funktionswert**.
- Wurde jedem Element der Definitionsmenge ein Element der Zielmenge zugeordnet, erkennt man die **Wertemenge**. Sie ist die Menge aller Funktionswerte.

Arbeitsblatt: Mengen

- Es wird von einer beliebigen Menge an Elementen ausgegangen. Man nennt dies die ______________ .
- Nun wird definiert mit welchen Elementen der Ausgangsmenge gearbeitet werden soll bzw. darf
  $\rightarrow$ Festlegung der ______________ .
- Anschließend wird eine Zuordnungsvorschrift - auch ______________ genannt - erstellt oder vorgegeben.

  Sie legt fest welches Element der Zielmenge zu welchem Element der Definitionsmenge gehört.

  Diese Zuordnung kann auf verschiedene Arten erfolgen:

  - ______________________
  - ______________________
  - ______________________
  - ______________________

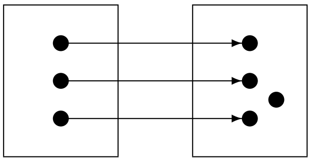
  Jedem Element der Definitionsmenge darf ______________ Element aus der Zielmenge zugeordnet werden. Nicht mehr und nicht weniger!
- Ein Element der Wertemenge, das mindestens einem Element der Definitionsmenge zugeordnet wurde nennt man ______________.
- Wurde jedem Element der Definitionsmenge ein Element der Zielmenge zugeordnet, erkennt man die ______________. Sie ist die Menge aller Funktionswerte.

2.3 Injektive, surjektive und bijektive Funktionen

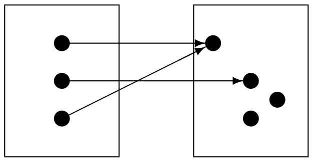
Bei vielen Funktionen ist es üblich, dass zwei verschiedenen Werten der Definitionsmenge der gleiche Funktionswert zugeordnet ist. Deshalb ist es schon etwas besonderes, wenn zwei verschiedenen Elementen x_1, x_2 der Definitionsmenge stets zwei verschiedene Funktionswerte zugeordnet werden.

Deshalb gibt es dafür auch eine besondere Bezeichnung:

> Eine Funktion $f : D_f \to Y$ heißt injektiv genau dann, wenn zwei verschiedenen Elementen der Definitionsmenge stets zwei verschiedene Funktionswerte zugeordnet werden.



f ist injektiv

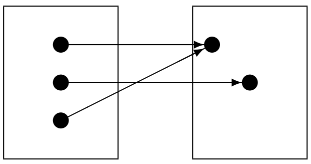


f ist nicht injektiv

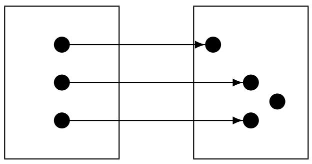
Beispiel:
Die Funktion $f : \mathbf{R} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbf{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ist nicht injektiv (vgl. Graph der Funktion). Schränkt man den Definitionsbereich jedoch auf $\mathbf{R}^+$ ein, so ergibt sich eine neue, injektive Funktion: $f^* : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ mit $f^*(x) = f(x)$.

Es ist ebenfalls erwähnenswert, falls alle Elemente $y \in Y$ als Funktionswerte auftreten. D. h. es gibt für alle $y \in Y$ ein Urbild in der Definitionsmenge.

> Eine Funktion $f : D_f \to Y$ heißt surjektiv genau dann, wenn jedes Element $y \in Y$ als Funktionswert von mindestens einem geeigneten x-Wert aus der Definitionsmenge auftritt.



f ist surjektiv



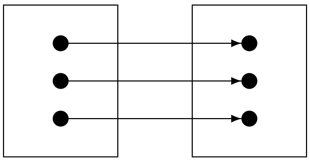
f ist nicht surjektiv

Beispiel:
Die Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $f(x) = \sin(x)$ ist nicht surjektiv, da alle Werte $y < -1$ und $y > 1$ kein Urbild in $\mathbf{D}$ haben. Schränkt man den Zielbereich Y jedoch auf $Y = [-1; 1]$ ein, so ist die Funktion $f^* : \mathbf{R} \to \mathbf{Y}$ mit $f^*(x) = f(x)$ surjektiv.

Ein ganz besonderer Fall tritt ein, fall jedem Element der Definitionsmenge **D** ein anderes Element der Zielmenge Y zugeordnet ist, und alle Elemente

$y \in Y$ als Funktionswerte auftreten.

> Eine Funktion $f : D_f \to Y$ heißt bijektiv genau dann, wenn sie sowohl injektiv, als auch surjektiv ist.



f ist bijektiv

Beispiel:
Die Funktion $f : x \mapsto 2x - 1$, $\mathbf{D_f} = \mathbf{R}$, $Y = \mathbf{R}$ ist bijektiv.

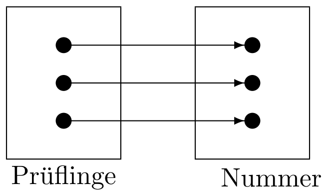
⇒ Anhand von Graphen im Buch besprechen ob eine Funktion injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

2.4 Die Umkehrfunktionen

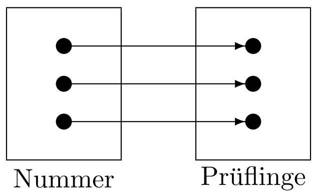
2.4.1 Definition der Umkehrfunktion

Um bei Prüfungen eine neutrale Korrektur zu ermöglichen ist es häufig üblich, dass die Prüflinge auf ihre Arbeit nicht den Namen, sondern eine anonyme Nummer schreiben. Gleichzeitig wird eine Liste erstellt, in welcher die Namen den zugehörigen Nummern zugeordnet werden.

Die Zuordnung Prüfling zu Nummer kann man als Funktion auffassen.



Wie man sieht, darf bei diesem Verfahren jede Nummer nur ein Mal vergeben werden. Sonst wäre eine spätere Zuteilung einer Note zu einem Prüfling nicht mehr möglich. Denn dabei muss die Nummer auf einer Prüfung wieder dem entsprechenden Prüfling zugeteilt werden.



Man erkennt, dass die zweite Zuordnung genau anders herum verläuft wie die erste. Deshalb nennt man sie die Umkehrfunktion zur ersten Zuweisung.

Sie existiert jedoch nur dann, wenn diese umgekehrte Zuordnung eindeutig möglich ist!

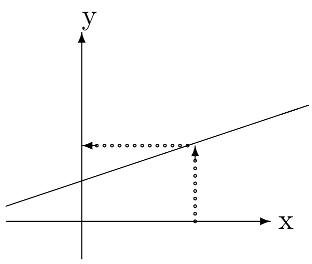
Dies kann auch mathematisch formuliert werden:

Eine Funktion $f : \mathbf{D} \to Y$ ist genau dann umkehrbar, wenn f sowohl injektiv, als auch surjektiv, also bijektiv ist.

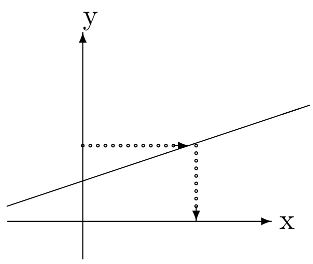
2.4.2 Term der Umkehrfunktion

Bei einer Funktion wird jedem x-Wert aus der Definitionsmenge ein bestimmter y-Wert zugeordnet. Dreht man diese Zuordnung um, so muss jedem y-Wert ein spezieller x-Wert entsprechen.

Graphisch veranschaulicht:

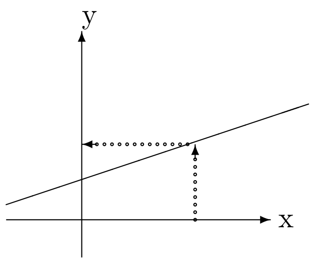


Funktion f

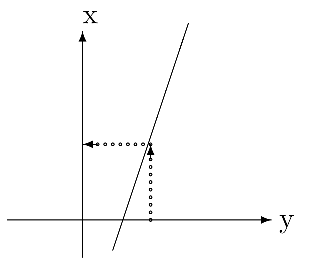


Umkehrfunktion f^{-1}

Da das vertauschte Ablesen bei der Umkehrfunktion für die meisten Personen sehr ungewöhnlich ist, werden einfach die zwei Achsen miteinander vertauscht. Das hat natürlich zur Folge, dass auch der Graph entsprechend umgezeichnet werden muss.



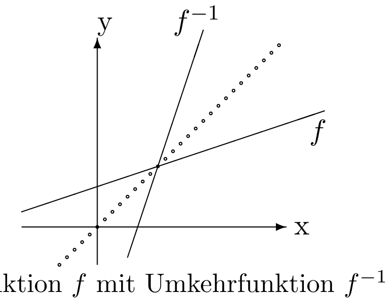
Funktion f



Umkehrfunktion f^{-1}

Dieses vertauschen der Achsen und umzeichnen des Graphen entspricht aber einer einfachen Spiegelung des gesamten Koordinatensystems mit dem Graphen der Funktion f an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten.

Da nun noch die Bezeichnung der Achsen ungewöhnlich ist, werden auch die Bezeichnungen noch vertauscht.



Funktion f mit Umkehrfunktion f^{-1}

Analytisch betrachtet erhält man die Umkehrfunktion durch folgende drei Schritte:

1. Auflösen der Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x.
2. Formales Vertauschen der Variablen x und y.
3. Angabe des Definitionsbereiches von f^{-1}.

Beispiel:

Gegebene Funktion:	$f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$
Funktionsgleichung aufstellen:	$y = \frac{1}{2}x + 1$
Definitionsbereich für f festlegen:	$\mathbf{D}_f = [-2, 2]$
Wertebereich von f ermitteln:	$\mathbf{W}_f = [f(-2); f(2)] = [0; 2]$
Umkehrfunktion ermitteln (1.Schritt):	$y = \frac{1}{2}x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2y - 2$
Umkehrfunktion ermitteln (2.Schritt):	$y = 2x - 2$
Umkehrfunktion ermitteln (3.Schritt):	$\mathbf{D}_{f^{-1}} = W_f = [0; 2]$
Umkehrfunktion angeben:	$f^{-1} : x \mapsto 2x - 2, \quad \mathbf{D}_{f^{-1}} = [0; 2]$

Übungsaufgaben:

1. $f : x \mapsto x^2, \quad \mathbf{D}_f = [0; 2]$
2. $f : x \mapsto 2x - 3, \quad \mathbf{D}_f = \mathbf{R}$
3. $f : a \mapsto \frac{-6+4a}{2}, \quad \mathbf{D}_f = [-3; 3]$
4. $f : x \mapsto \frac{1}{3x^2}, \quad \mathbf{D}_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

Lösungen zu den Übungsaufgaben:

1. $y = \sqrt{x}, \quad \mathbf{D}_{f^{-1}} = [0; 4]$
2. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, \quad \mathbf{D}_{f^{-1}} = \mathbf{R}$
3. $y = \frac{1}{2}a + \frac{3}{2}, \quad \mathbf{D}_{f^{-1}} = [-9; 3]$
4. $y = \sqrt{\frac{1}{3x}}, \quad \mathbf{D}_{f^{-1}} = \mathbf{R}^+ \setminus \{0\}$

2.5 Eigenschaften reeller Funktionen

2.5.1 Gerade Funktionen

Eine reelle Funktion $f : x \mapsto f(x), x \in D_f$ heißt gerade, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D_f$ gilt. Der Graph einer geraden Funktion im Koordinatensystem ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Eine ganzrationale Funktion ist genau dann eine gerade Funktion, wenn im Funktionsterm nur gerade Hochzahlen (einschließlich Null) vorkommen!

Beispiele:

- Für die Funktion $f : x \mapsto 2x^2 + 2$ gilt, dass $f(-x) = 2 \cdot (-x)^2 + 2 = 2x^2 + 2 = f(x)$ ist. Somit ist die Bedingung $f(-x) = f(x)$ erfüllt, und die Funktion ist gerade.
  So ist $f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 + 2 = 2 \cdot 2 + 2 = 6 = f(2)$.
- Untersuchung der Funktion $f(x) = |x|, D_f = \mathbf{R}$.
  $\Rightarrow f(-x) = |-x| = |(-1) \cdot x| = |(-1)| \cdot |x| = 1 \cdot |x| = |x| = f(x)$

2.5.2 Ungerade Funktionen

Eine reelle Funktion $f : x \mapsto f(x), x \in D_f$ heißt ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D_f$ gilt. Der Graph einer ungeraden Funktion im Koordinatensystem ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Eine ganzrationale Funktion ist genau dann eine ungerade Funktion, wenn im Funktionsterm nur ungerade Hochzahlen vorkommen!

Beispiele:

- Die Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{4}x^3$ ist ungerade, weil für diese Funktion die Beziehung $f(-x) = -f(x)$ gilt.
  So ist $f(-3) = \frac{1}{4} \cdot (-3)^3 = \frac{1}{4} \cdot (-27) = -6,75 = -f(3)$.
- Untersuchung der Funktion $y = \sin(x)$.
  $\Rightarrow g(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -g(x)$

2.5.3 Monotone Funktionen

Die Funktion $f : D \to \mathbf{R}$ heißt genau dann monoton zunehmend in einem Intervall $I \subset D$, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ und $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) \leq f(x_2)$ folgt.

Hinweis: Gilt in dieser Definition sogar $f(x_1) < f(x_2)$, dann ist die Funktion im Intervall I sogar streng monoton zunehmend!

In der Praxis kann diese Bedingung leicht überprüft werden. Für jede streng monoton zunehmende Funktion muss nämlich gelten:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \quad \text{mit: } x_1, x_2 \in I \quad \wedge \quad x_1 \neq x_2$$

Jede streng monoton zunehmende Funktion ist immer bijektiv (vgl. 2.3).

Beispiele:

- Für die Funktion $f : x \mapsto x^2$ mit $D_f = x|x > 0$, mit $x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2$ gilt:

  $$\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 + x_2) \cdot (x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 > 0$$

  Da laut Definitionsbereich x_1 und x_2 größer Null sein müssen, ist auch die Summe stets größer Null.

- Gegebene Funktion: $y = 2x - 3$

  $$\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(2x_1 - 3) - (2x_2 - 3)}{x_1 - x_2} = \frac{2x_1 - 3 - 2x_2 + 3}{x_1 - x_2} = \frac{2 \cdot (x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = 2 > 0$$

  Am Graph kann man gut erkennen, dass es sich um eine ansteigende Gerade handelt, und die Funktion sicher streng monoton steigend ist.

> Die Funktion $f : D \to \mathbf{R}$ heißt genau dann monoton abnehmend in einem Intervall $I \subset D$, wenn aus $x_1, x_2 \in I$ und $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) > f(x_2)$ folgt.

Hinweis: Gilt in dieser Definition sogar $f(x_1) > f(x_2)$, dann ist die Funktion im Intervall I sogar streng monoton abnehmend!

Auch hier gibt es für die Praxis die Möglichkeit die Bedingung für eine streng monoton abnehmende Funktion leicht zu überprüfen. Es muss hierfür stets gelten:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \quad \text{mit: } x_1, x_2 \in I \quad \wedge \quad x_1 \neq x_2$$

Beispiele:

- Für die Funktion $f : x \mapsto x^2$ mit $D_f = \mathbf{R}^-$, mit $x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2$ gilt:

  $$\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 + x_2) \cdot (x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 < 0$$

  Da laut Definitionsbereich x_1 und x_2 kleiner Null sein müssen, ist auch die Summe stets kleiner Null.

- Gegebene Funktion: $y = -3x + 1$

$$\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-3x_1 + 1) - (-3x_2 + 1)}{x_1 - x_2} = \frac{-3x_1 + 1 + 3x_2 - 1}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{3 \cdot (-x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-3 \cdot (x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = -3 < 0$$

  Am Graph kann man gut erkennen, dass es sich um eine abnehmende Gerade handelt, und die Funktion sicher streng monoton abnehmend ist.

Jede streng monoton abnehmende Funktion ist immer bijektiv (vgl. 2.3).

2.5.4 Beschränkte Funktionen

Werden die Funktionswerte einer Funktion f nicht größer als ein bestimmter Wert, so nennt man diesen die kleinste obere Schranke (oder auch das **Supremum**) der Funktion. Alle Werte die darüber liegen werden als **obere Schranke** der Funktion bezeichnet.
Auf der anderen Seite kommt es vor, dass die Funktionswerte einer Funktion nie unter einen kleinsten Wert, die größte untere Schranke (oder auch das **Infimum**) absinken. Alle Werte darunter werden dann als **untere Schranke** bezeichnet.

Existiert sowohl eine obere, als auch eine untere Schranke, so nennt an die Funktion beschränkt.

Eine in D definierte reelle Funktion f ist dort beschränkt, wenn es zwei reelle Zahlen s und S gibt, so dass für alle $x \in D$ gilt: $s \leq f(x) \leq S$.

Beispiele:

- Gegeben sei die reelle Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbf{R}$.
  Man kann sich überlegen, dass der Nenner der Funktion für beliebig große x-Werte immer größer wird. Wenn der Nenner aber beliebig groß wird, dann geht der Wert des gesamten Bruchs immer weiter gegen Null. Er wird jedoch nie ganz zu Null, geschweige denn kleiner! Deshalb ist die größte untere Grenze (also das Infimum) $s = 0$.
  Versucht man dagegen den Nenner möglichst klein zu machen, so stellt man fest, dass der x-Wert dafür gegen Null gehen muss - der kleinste Wert wird für $x = 0$ erreicht. Dann ist der Wert des gesamten Bruchs jedoch am größten, nämlich 1. Somit ist das Supremum der Funktion $S = 1$.

- Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist für $x \in \mathbf{R}, x \neq 0$ nicht beschränkt. Betrachtet man jedoch nur das Intervall $I =]0; 1]$, so ist die Funktion nach unten beschränkt (Infimum $s = 0$), nach oben jedoch unbeschränkt.

2.5.5 Übungsaufgaben

1. Untersuchen Sie nachfolgende Funktionen auf Symmetrie.

   (a) $f(x) = 4x^4 + 3x^2 - 1$
   (b) $f(x) = 0,5x^3 - 8x^2$
   (c) $f(a) = 8a^7 - 2a^3 + 4a$
   (d) $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{x^2}$
   (e) $h(x) = 7\sqrt{x}$

2. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Monotonie in der angegebenen Definitionsmenge.

   (a) $y = x^2 - 3 \quad D = \mathbf{R}^-$
   (b) $x \to 5x + 1 \quad D = \mathbf{R}$
   (c) $f(x) = x^3 \quad D = \mathbf{R}$
   (d) $y = (x-1)^2 \quad D = [0;5]$
   (e) $g(x) = -x^2 + 2 \quad D = \mathbf{R}$

3. Sind folgende Funktionen in ihrer Funktionsmenge beschränkt?

   (a) $f(x) : x \to 2x + 3 \quad D = [1;4]$
   (b) $y = \frac{4}{1+|x|} \quad x \in \mathbf{R}$
   (c) $y = -2x^2 + 3 \quad D = [-7;-4]$

Lösungen:

1. (a) gerade $\to$ symmetrisch zur y-Achse
   (b) keine Symmetrie
   (c) ungerade $\to$ punktsymmetrisch zum Ursprung
   (d) gerade $\to$ symmetrisch zur y-Achse
   (e) keine Symmetrie (Radikand muss immer positiv sein - deshalb ist eine Symmetrie gar nicht möglich!)

2. (a) monoton fallend
   (b) monoton steigend
   (c) monoton steigend
   (d) monoton fallend für $x \in [0;1[$ und monoton steigend für $x \in]1;5]$
   (e) keine Monotonie in ganz D. Betrachtet man die Funktion nur abschnittsweise, dann ist $g(x)$ im Bereich $x \leq 0$ monoton steigend, während sie für $x \geq 0$ monoton fällt.

3. (a) Funktionswert kann nicht kleiner als 5 und größer als 11 werden. Deshalb ist $s = 5$ und $S = 11$
   (b) Der $|x|$ kann nicht kleiner als Null werden. D. h. der Bruch kann nie größer als 4 werden. Damit ist das Supremum $S = 4$.
   Da $x \in \mathbf{R}$ kann x beliebig grosse Werte annehmen. Geht der Wert von x schließlich gegen unendlich, so geht der Wert des Bruchs gegen Null. Deshalb ist das Infimum $s = 0$.
   (c) Das Infimum $s = -29$ während das Supremum $S = -25$ ist.