3 Lineare und quadratische Funktionen

3.1 Lineare Funktion

Eine Funktion der Art $f :\mapsto mx + t, \quad x \in \mathbf{D}$ heißt lineare Funktion (m und t sind reelle Zahlen)

Man kann die Funktionsgleichung auf zwei verschiedene Arten angeben:

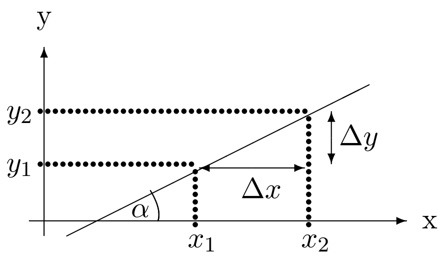
- Explizite Form:

$$y = mx + t \qquad \text{oder} \qquad f(x) = mx + t$$

- Implizite Form:

$$ax + by + c = 0, \qquad \text{wobei: } m = -\frac{a}{b}, \quad t = -\frac{c}{b}, \quad b \neq 0$$

Der Steigungsfaktor m ist definiert als der Tangens des Neigungswinkels α.



Neigungswinkel α einer Geraden

Der Neigungswinkel α ist aus den Katheten im Steigungsdreieck zu berechnen. Dazu muss der Quotient aus den Differenzen der y-Werte und der x-Werte gebildet werden.

$$m = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Im naturwissenschaftlichen Bereich wird eine Differenz üblicherweise durch den griechischen Buchstaben Delta Δ ausgedrückt. Damit erhält man:

$$m = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Da hier ein Bruch (Quotient) aus zwei Differenzen gebildet wird, nennt man $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ einen **Differenzenquotient** (siehe auch Seite 96).

3.1.1 Ermittlung des Graphen einer linearen Funktion bzw. der Funktionsgleichung

1. **Gegeben sind zwei Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$**
   Ermittlung des Graphen:

   - P_1 und P_2 im Koordinatensystem eintragen
   - Gerade durch P_1 und P_2 zeichnen

   Ermittlung der Funktionsgleichung:

   $$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1)$$

2. **Gegeben ist die Funktionsgleichung**
   Ermittlung des Graphen:

   - Beliebigen x_1-Wert aus **D** auswählen und zugehörigen y_1-Wert berechnen.
   - Beliebigen x_2-Wert aus **D** auswählen und zugehörigen y_2-Wert berechnen.
   - Weiter wie unter (1) beschrieben.

3. **Gegeben sei ein Punkt $P(x_1, y_1)$ und die Steigung m**
   Ermittlung des Graphen:

   - Punkt P ins Koordinatensystem eintragen
   - Vom Punkt P trägt man eine Strecke [PA] der Länge 1 nach rechts, parallel zur x-Achse, an.
   - Am Ende der Einheitsstrecke [PA] trägt man im rechten Winkel die Strecke [AB] der Länge $|m|$ an. Dies geschieht für $m > 0$ nach oben, für $m < 0$ nach unten.
   - Nun kann die Gerade durch P und B eingezeichnet werden.

   Ermittlung der Funktionsgleichung:

   $$y = m \cdot (x - x_1) + y_1$$

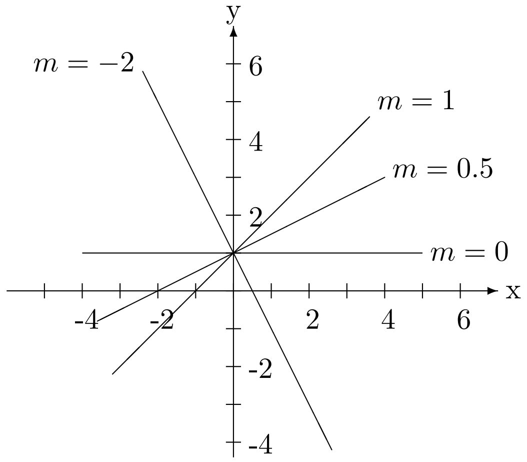
3.1.2 Geradenschar

Wird in der linearen Funktion für die Steigung m kein fester Wert vorgegeben, dann beschreibt der Funktionsterm eine unendliche Anzahl von Geraden.

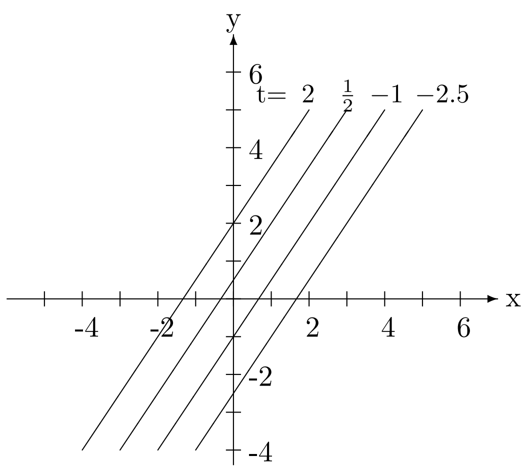
Diese haben alle den gleichen y-Abschnitt, jedoch unterschiedliche Steigungen.

Alle Geraden, die durch einen solchen Funktionsterm beschrieben werden nennt man ein **Geradenbüschel**.

Ist dagegen die Steigung fest vorgegeben, aber der y-Abschnitt variabel, so spricht man von einem **parallelen Geradenbündel**, oder einer **Parallelenschar**.



Geradenbüschel: $y = mx + 1$



Parallelenschar: $y = 1,5x + t$

3.2 Lineare Gleichungen

Gegeben sei eine lineare Funktion $f : x \mapsto 2,5x + 3,5 \quad , x \in \mathbf{R}$. Schreibt man die Funktion in expliziter Form an, so erhält man $y = 2,5x + 3,5$.

Man erkennt leicht, dass es zwei ganz herausragende Punkte gibt:

- $x = 0$
  Schnittpunkt des Graphen G_f mit der y-Achse („y-Abschnitt“).
- $y = 0$
  Schnittpunkt des Graphen G_f mit der x-Achse („Abszisse“ oder „Nullstelle“ der Funktion).

Um die Abszisse einer linearen Funktion zu berechnen muss folgender, allgemeiner Ansatz gewählt werden:

$$ax + b = 0$$

> Eine Gleichung mit der Definitionsmenge $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{G}$ heißt linear (oder ersten Grades), wenn sie sich durch die Form $a \cdot x + b = 0$ mit $a, b \in \mathbf{R}$ darstellen lässt.

Beispiele:

- Gleichung mit Klammern:

$$\begin{aligned} 5 \cdot (2 - x) &= 3 \cdot (5x + 8) \\ 10 - 5x &= 15x + 24 \\ 20x + 14 &= 0 \\ 20x &= -14 \\ x &= -0,7 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{-0,7\}}}$$

- Gleichung mit Parameter:

$$\begin{aligned} a \cdot x + 7 &= 7 \cdot x \\ ax - 7x + 7 &= 0 \\ (a - 7) \cdot x + 7 &= 0 \\ x &= -\frac{7}{a - 7} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \qquad \text{1. Fall: } a \neq 7 \qquad \rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \left\{-\tfrac{7}{a-7}\right\}}}$$

$$\rightarrow \qquad \text{2. Fall: } a = 7 \qquad \rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{\,\} = \emptyset}}$$

- Gleichung mit rationalem Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}\cdot(x-4)+x &= 4\\
\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}+x &= 4\\
\left(\frac{2}{3}+1\right)x-\frac{20}{3} &= 0\\
\frac{5}{3}x &= \frac{20}{3}\\
x &= 4
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L}=\{4\}}}$$

- Textangabe:
  Bei einem Rechteck verhalten sich die Längen der Seiten wie 5 : 2. Der Umfang des Rechtecks beträgt 35 cm. Welche Maße hat das Rechteck?

  → Die Länge der kurzen Seite wird mit a bezeichnet.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{5}{2}a+a\right)\cdot 2 &= 35\\
5a+2a-35 &= 0\\
7a-35 &= 0\\
a &= 5
\end{aligned}$$

  → Die kurze Seite des Rechtecks ist $a = 5\,cm$,
  die lange Seite $b = \frac{5}{2}a = 12,5\,cm$ lang.

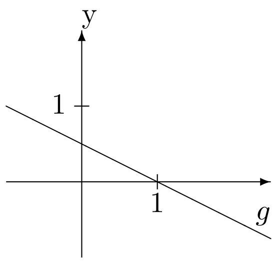
3.3 Lineare Ungleichungen

Die Aussageform $y \geq -0,5x+0,5$ lässt sich in die lineare Funktion $x = -0,5x+0,5$ und die Relation $y > -0,5x+0,5$ zerlegen.

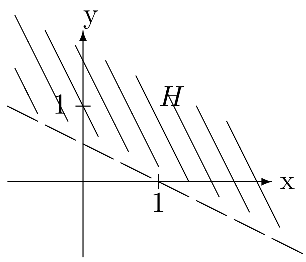
Der Graph der linearen Funktion ist die Gerade g mit dem y-Abschnitt 0,5 und der Abszisse 1.

Der Graph der Relation ist die Halbebene H, die oberhalb der Geraden g

liegt. Alle darin enthaltenen Punkte erfüllen die Bedingung der Relation.



Graph der Funktion



Graph der Relation

Setzt man in der Relation $y = 0$, so wird aus der Relation eine lineare Ungleichung: $0 > -0,5x + 0,5$.

Die Lösungsmenge lässt sich gut anhand des Graphen bestimmen. Für alle x-Werte, die rechts von der Abszisse $x = 1$ der Funktion liegen, ist die Ungleichung $0 > -0,5x + 0,5$ erfüllt. Deshalb lautet die Lösungsmenge $\mathbf{L} = \{x|x > 1\}$.

> Eine Ungleichung mit der Definitionsmenge $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{G}$ heisst linear oder ersten Grades, wenn sie in der Form $ax + b > 0$ oder $ax + b < 0$ mit $a, b \in \mathbf{R}$ und $a \neq 0$ darstellbar ist.

Tips für die Praxis

- Werden Ungleichungen umgestellt, so muss bei einer Multiplikation oder einer Division mit einer negativen Zahl das Ungleichheitszeichen umgedreht werden!
- Werden Ungleichungen mit einem Parameter multipliziert bzw. durch diesen dividiert, so muss eine Fallunterscheidung durchgeführt werden, da der Parameter positiv, oder negativ sein kann.
- Doppelungleichungen werden stets in zwei einzelne Ungleichungen zerlegt. Diese werden getrennt voneinander berechnet, und dann die Lösungsmengen wieder vereinigt.

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} -3x &< 10 \\ x &> -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \left\{x|x > -\frac{10}{3}\right\}}}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} \frac{x}{-2}+8 &> 7 \\ \frac{x}{-2} &> -1 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L}=\{x|x<2\}}}$$

Beispiel 3:

$$0,75x-0,5<3x+1<-1,25x+5$$

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{4}x-\tfrac{1}{2} &< 3x+1 \\ -\tfrac{9}{4}x &< \tfrac{3}{2} \\ x &> -\tfrac{2}{3} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 3x+1 &< -\tfrac{5}{4}x+5 \\ \tfrac{17}{4}x &< 4 \\ x &< \tfrac{16}{17} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L}=\left\{x|-\frac{2}{3}<x<\frac{16}{17}\right\}}}$$

Beispiel 4:

$$-2x+3\leq 0,25x-0,25\leq 2x+1$$

$$\begin{aligned} -2x+3 &\leq 0,25x-0,25 \\ -2,25 &\leq 2,75 \\ x &\geq \tfrac{11}{9} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 0,25x-0,25 &\leq 2x+1 \\ -1,75 &\leq 1,25 \\ x &\geq \tfrac{5}{7} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L}=\left\{x|x\geq\frac{11}{9}\right\}}}$$

Die Bedingung aus der rechten Ungleichung $x \geq \frac{5}{7}$ ist mit der Lösungsmenge automatisch mit abgedeckt, da $\frac{11}{9} > \frac{5}{7}$.

Beispiel 5:

$$3x+0,5>5x-3>x+4,5$$

$$\begin{aligned} 3x+0,5 &> 5x-3 \\ -2x &> -3,5 \\ x &< \tfrac{7}{4} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 5x-3 &> x+4,5 \\ 4x &> 7,5 \\ x &> \tfrac{15}{8} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L}=\{\,\}}}$$

Der Wert von x kann nicht gleichzeitig größer als $\frac{15}{8}$ und kleiner als $\frac{7}{4}$ sein.

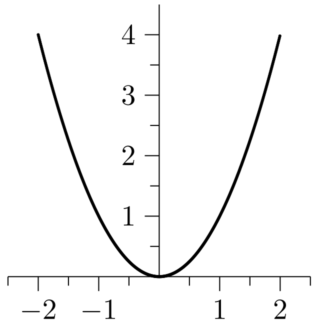
3.4 Quadratische Funktion

Normalparabel

Funktionsterm: $y = x^2$

$\rightarrow$ Koeffizienten:
$a = 1 \qquad b = 0 \qquad c = 0$

$\rightarrow$ Scheitel der Parabel ist Tiefpunkt: $S(0; 0)$

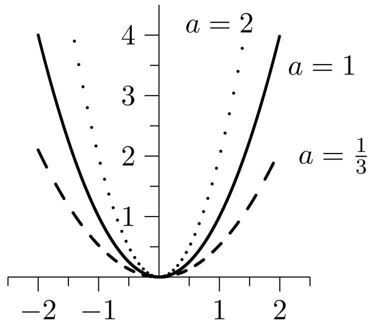


Stauchung und Streckung

Funktionsterm: $y = a \cdot x^2$

$\rightarrow$ Koeffizienten:
$sig(a) = 1 \wedge |a| < 1$ (Stauchung)
$sig(a) = 1 \wedge |a| > 1$ (Streckung)
$b = 0, \quad c = 0$

$\rightarrow$ Scheitel der Parabel ist Tiefpunkt: $S(0; 0)$

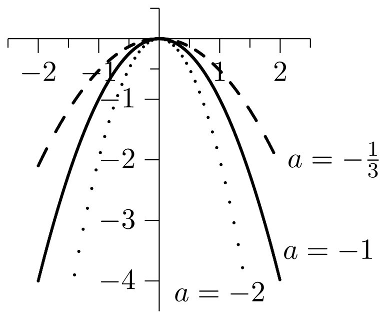


Stauchung, Streckung und Spiegelung an x-Achse

Funktionsterm: $y = a \cdot x^2$

$\rightarrow$ Koeffizienten:
$sig(a) = -1 \wedge |a| < 1$ (Stauchung und Spiegelung)
$sig(a) = -1 \wedge |a| > 1$ (Streckung und Spiegelung)
$b = 0, \quad c = 0$

$\rightarrow$ Scheitel der Parabel ist Hochpunkt: $S(0; 0)$

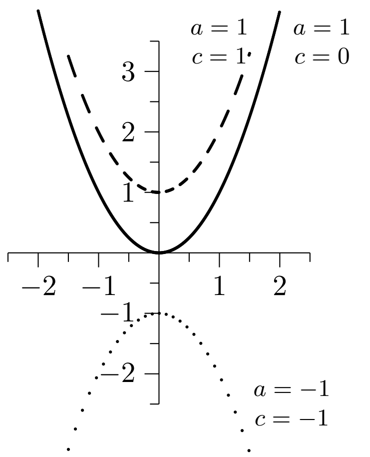


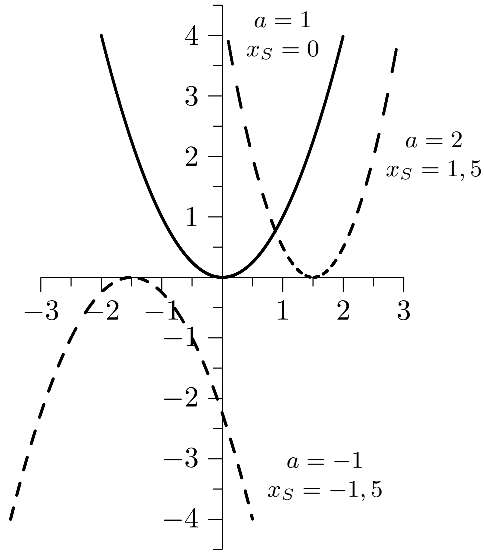
Verschiebung der Parabel längs der y-Achse

Funktionsterm: $y = a \cdot x^2 + c$

$\rightarrow$ Koeffizienten:
$b = 0$
$c > 0$ (Verschiebung nach oben)
$c < 0$ (Verschiebung nach unten)

$\rightarrow$ Scheitel der Parabel ist für:
- $a > 0$ ein Tiefpunkt: $S(0; c)$
- $a < 0$ ein Hochpunkt: $S(0; c)$





Verschiebung der Parabel längs der x-Achse

Funktionsterm: $y = a \cdot (x - x_S)^2$

→ Koeffizienten:

$x_S > 0$ (Verschiebung nach rechts)
$x_S = 0$ (Achsensymmetrisch zur y-Achse)
$x_S < 0$ (Verschiebung nach links)

→ Scheitel der Parabel ist für:

- $a > 0$ ein Tiefpunkt: $S(x_S; 0)$
- $a < 0$ ein Hochpunkt: $S(x_S; 0)$

Beispiele:

Geben Sie den Funktionsterm einer Parabel mit folgenden Eigenschaften an:

1. Normalparabel nach oben geöffnet, um drei nach rechts verschoben
2. Um den Faktor zwei gestreckte Normalparabel, nach unten geöffnet, $\frac{3}{2}$ nach oben verschoben.
3. Normalparabel um den Faktor 4 gestaucht, zwei nach links und 1 nach oben verschoben.
4. Normalparabel mit Hochpunkt $HP(3; 1)$.

Lösungen zu den Beispielen:

1. $y = (x - 3)^2$
2. $y = -2x^2 + \frac{3}{2}$
3. $y = \frac{1}{4}[x - (-2)]^2 - 1$
4. $y = (-1) \cdot (x - 3)^2 + 1$

3.4.1 Die allgemeine Form

Nimmt man die Lösung des letzten Beispiels und multipliziert dieses aus, so erhält man:

$$\begin{aligned} y &= (-1)\cdot(x-3)^2+1 \\ y &= (-1)\cdot(x^2+6x-9)+1 \\ y &= \underbrace{(-1)}_{a}\cdot x^2+\underbrace{6}_{b}\cdot x+\underbrace{(-8)}_{c} \end{aligned}$$

Eine Funktion der Form $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ heißt quadratische Funktion, wobei $a, b, c \in \mathbf{R} \quad \wedge \quad a \neq 0$

In der allgemeinen Form $ax^2+bx+c = y$ einer quadratischen Funktion heißt ax^2 quadratisches Glied, bx nennt man lineares Glied und c wird als konstantes Glied oder Absolutglied bezeichnet.

3.4.2 Die Scheitelform

Um aus der allgemeinen Form der quadratischen Funktion den Scheitel einer Parabel zu erhalten geht man folgendermaßen vor:

$$\begin{array}{ll} & f(x) = ax^2 + bx + c \\ \text{a ausklammern} & f(x) = a\cdot\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] \\ \text{quadrat. ergänzen} & f(x) = a\cdot\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right] \\ \text{binom. Formel} & f(x) = a\cdot\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right] \\ \text{Hauptnenner} & f(x) = a\cdot\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] \\ \text{Klammer auflösen} & f(x) = a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \end{array}$$

Mit $-\frac{b}{2a} = x_S$ und $\frac{4ac-b^2}{4a} = c$ erhält man die bereits bekannte Form der quadratischen Funktion $y = a\cdot(x-x_S)^2+c$. Dies nennt man die Scheitelform der quadratischen Funktion.

Die Gleichung $f(x) = a\cdot(x-x_S)^2+c$ heißt Scheitelgleichung der quadratischen Funktionen, deren Graphen den Scheitel $S(x_S; c)$ haben.

3.4.3 Parabel durch drei Punkte

Gegeben seien drei Punkte $A(-1; 33)$, $B(0; 19)$ und $C(1; 9)$.

Gesucht ist die Funktion einer Parabel in der allgemeinen und in der Scheitelform, welche diese drei Punkte beinhaltet.

→ Allgemeine Form der Parabelgleichung: $y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{array}{ll} \text{aus Punkt A: (I)} & 33 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \\ \text{aus Punkt B: (II)} & 19 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ \text{aus Punkt C: (III)} & 9 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \end{array}$$

$$\text{aus (III): } c = 19 \qquad \clubsuit$$

$$\begin{array}{rl} \clubsuit \text{ in (I):} & 33 = a - b + 19 \\ & a = 14 + b \qquad \diamondsuit \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \clubsuit \text{ und } \diamondsuit \text{ in (III):} & 9 = (14 + b) + b + 19 \\ & 9 = 33 + 2b \\ & b = -12 \qquad \heartsuit \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \heartsuit \text{ in } \diamondsuit & a = 14 + (-12) \\ & a = 2 \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \text{allgemeine Form:} \quad \underline{\underline{y = 2 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 19}}$$

$$\begin{array}{rcl} y &=& 2 \cdot [x^2 - 6x + 9,5] \\ y &=& 2 \cdot [x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 9,5] \\ y &=& 2 \cdot [(x-3)^2 + 0,5] \\ y &=& 2 \cdot (x-3)^2 + 1 \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \text{Scheitelform:} \quad \underline{\underline{y = 2 \cdot (x-3)^2 + 1}}$$

3.4.4 Tangente an eine Parabel

Gegeben seien die Funktion einer Parabel und ein beliebiger Punkt (dieser kann, muss jedoch nicht Element des Parabelgraphen sein).

Gesucht ist die Gleichung einer Tangente an die Parabel, welche auch durch den gegebenen Punkt verläuft.

Geg: Parabel $y = 2(x-3)^2 + 2$ und Punkt $P(7; 26)$.

→ Allgemeine Form der Geradengleichung:

$$\begin{array}{rr} & y = mx + t \\ & 26 = m \cdot 7 + t \\ \rightarrow & t = 26 - 7m \end{array}$$

$$\rightarrow \text{Geradenbüschel durch Punkt P:} \quad y = mx + (26 - 7m)$$

Der Berührpunkt ist sowohl ein Element der Tangente, als auch der Parabel. Deshalb können die beiden Funktionen gleich gesetzt werden:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 12x + 20 &= mx + 26 - 7m \\ 2x^2 - 12x - mx - 6 + 7m &= 0 \\ 2x^2 - (12 + m)x - 6 + 7m &= 0 \end{aligned}$$

Ein Berührpunkt liegt vor, wenn diese Gleichung nur eine Lösung hat (sonst schneidet die Gerade die Parabel, und es gibt zwei Lösungen, bzw. die Gerade läuft an der Parabel vorbei womit es keine Lösung gibt). Die Diskriminante der Lösungsformel muss also Null sein.

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ 0 &= (-12 - m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6 + 7m) \\ 0 &= 144 + 24m + m^2 + 48 - 56m \\ 0 &= m^2 - 32m + 192 \\ m_{1/2} &= \frac{32 \pm \sqrt{(-32)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 192}}{2 \cdot 1} \\ m_{1/2} &= \frac{32 \pm 16}{2} \end{aligned}$$

$m_1 = 24$		$m_2 = 8$
$\rightarrow g_1(x) = 24x + (26 - 7 \cdot 24)$		$\rightarrow g_2(x) = 8x + (26 - 7 \cdot 8)$
$g_1(x) = 24x - 142$	Tangenten	$g_2(x) = 8x - 30$
$BP_1(9; 74)$	Berührpunkte	$BP_2(5; 10)$

3.4.5 Umkehrfunktion quadratischer Funktionen

Quadratische Funktionen sind in **D** nicht umkehrbar. Wenn allerdings der Definitionsbereich der quadratischen Funktion so eingeschränkt wird, dass die Zuordnungsvorschrift injektiv (siehe Kapitel 2.3 Seite 17) wird, dann ist die Umkehrung möglich!

Vorgehensweise:

- **Schritt 1:** Quadratische Funktion nach x umstellen.
  → Man erhält eine quadratische Gleichung für x.

$$ax^2 + bx + c = y \qquad \leftrightarrow \qquad ax^2 + bx + c - y = 0$$

- **Schritt 2:** Ansetzen der Lösungsformel.

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a \cdot (c - y)}}{2a}$$

- **Schritt 3:** Entscheiden, ob in der Lösungsformel das Plus-, oder das Minuszeichen gültig ist. Dies hängt vom Definitionsbereich $\mathbf{D}_f$ für x ab.
- **Schritt 4:** Variable vertauschen und neuen Definitionsbereich $\mathbf{D}_{f^{-1}}$ angeben.

$$f^{-1}(x) : y = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a \cdot (c - x)}}{2a} \qquad \mathbf{D_{f^{-1}} = W_f}$$

oder

$$f^{-1}(x) : y = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a \cdot (c - x)}}{2a} \qquad \mathbf{D_{f^{-1}} = W_f}$$

Beispiele:

- $y = x^2 + 4x - 3 \qquad \mathbf{D} = \mathbf{R}_0^+$

Schritt 1:	$x^2 + 4x - (3 + y) = 0$
Schritt 2:	$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 1 \cdot (3+y)}}{2 \cdot 1} = -2 \pm \sqrt{7 + y}$
Schritt 3:	Da x nur Werte aus $\mathbf{R}_0^+$ annehmen darf, muss das Pluszeichen gelten.
Schritt 4:	$y = -2 + \sqrt{7 + x} \qquad \mathbf{D_{f^{-1}} = W_f} = [\mathbf{-3}; +\infty[$

- $y = -2(x + 3)^2 + 1 \qquad \mathbf{D} = [-2; +\infty[$

Schritt 1:	$-2x^2 - 12x - 17 - y = 0$
Schritt 2:	$x_{1/2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-17-y)}}{2 \cdot (-2)} = -3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2 - 2y}$
Schritt 3:	Da x größtenteils nur positive Werte annehmen darf, muss das Pluszeichen gelten.
Schritt 4:	$y = -3 + \frac{1}{2}\sqrt{2 - 2x} \qquad \mathbf{D_{f^{-1}} = W_f} =]-\infty; \mathbf{-1}]$

- $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 4 \qquad \mathbf{D} =]-\infty; -2]$

Schritt 1:	$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 6 - y = 0$
Schritt 2:	$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-6-y)}}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = 2 \pm \sqrt{-8 - 2y}$
Schritt 3:	Da x nur negative Werte annehmen darf, muss das Minuszeichen gelten.
Schritt 4:	$y = 2 - \sqrt{-8 - 2x} \qquad \mathbf{D_{f^{-1}} = W_f} =]-\infty; \mathbf{-12}]$

Übungsaufgaben

1. Beschreiben Sie in Worten wie der Graph folgender Funktionen aussieht.
   (a) $y = -5(x+3)^2 + 2$
   (b) $y = \frac{9}{7} \cdot x^2 - 4$
   (c) $0,5x^2 - y + 3 = 0$
   (d) $x - \frac{4}{x} = \frac{y}{x}$
2. Bestimmen Sie das absolute Maximum und das absolute Minimum bei folgenden Funktionen
   (a) $y = 4x^2 + 2x - 6 \qquad x \in [-1; 5]$
   (b) $y = -\frac{1}{9}x^2 - 27x + 1 \qquad x \in [0; 3]$
3. Eine Parabel verläuft durch die Punkte $A(0|1)$, $B(3|\frac{5}{2})$ und $C(4|5)$.
   (a) Geben Sie die Funktionsgleichung der Parabel an.
   (b) In welchem Bereich der x-Achse sind die Funktionswerte größer $\frac{3}{2}$?
   (c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels der Parabel.
   (d) Zeichnen Sie den Graphen der Parabel und kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse.
4. Formen Sie die Gleichung $y = 2 \cdot (x-3)^2 + 2$ in die allgemeine quadratische Form um.
5. Geben Sie die Koordinaten des Scheitels der Funktion $f(x) = 7x^2 - 14x - 7$ an.
6. Für welche x-Werte sind die Funktionswerte der Parabel $y = 2x^2 + 2$ kleiner als 3?
7. Eine Parabel verläuft durch die Punkte $A(-2|-11)$, $B(1|-2)$ und $C(2|-15)$. Geben Sie die Gleichung der Parabel in der allgemeinen quadratischen Form und in der Scheitelform an.

Lösungen

1. (a) - Nach unten geöffnet (Faktor vor der Klammer ist negativ)
   - Gestreckt (Betrag des Faktors vor der Klammer ist größer als 1)
   - Scheitel liegt bei $S(-3|2)$

   (b) - Nach oben geöffnet (Faktor vor dem x^2 ist positiv)
   - Gestreckt (Betrag des Faktors vor dem x^2 ist größer als 1)
   - Scheitel liegt bei $S(0|-4)$

   (c) Kann umgestellt werden → $y = 0,5x^2 + 3$
   - Nach oben geöffnet (Faktor vor dem x^2 ist positiv)
   - Gestaucht (Betrag des Faktors vor dem x^2 ist kleiner als 1)
   - Scheitel liegt bei $S(0|3)$

   (d) Kann umgestellt werden → $y = x^2 - 4$
   - Nach oben geöffnet (Faktor vor dem x^2 ist positiv)
   - Normalparabel (Betrag des Faktors vor dem x^2 ist gleich 1)
   - Scheitel liegt bei $S(0|-4)$

2. (a)

$$\begin{aligned}
y &= 4 \cdot \left[x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right] \\
y &= 4 \cdot \left[x^2 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{3}{2}\right] \\
y &= 4 \cdot \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{4}
\end{aligned}$$

→ Aus Angabe: Parabel ist nach oben geöffnet.
→ Scheitel ist TP: $S(-\frac{1}{4}|-\frac{25}{4})$
→ Absolutes Maximum am Rand des Definitionsbereichs: $HP(5|104)$

   (b)

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{9} \cdot \left[x^2 + 243x - 9\right] \\
y &= -\frac{1}{9} \cdot \left[x^2 + 243x + (121,5)^2 - (121,5)^2 - 9\right] \\
y &= -\frac{1}{9} \cdot (x + 121,5)^2 + 1641,25
\end{aligned}$$

→ Aus Angabe: Parabel ist nach unten geöffnet.
→ Scheitel $S(-121,5|1641,25)$ liegt außerhalb des Definitionsbereichs.
→ Maximum und Minimum müssen an den Definitionsgrenzen liegen:
Absolutes Minimum: $TP(3|-81)$
Absolutes Maximum: $HP(0|1)$

3. (a) allgemeine Form der quadratischen Gleichung: $y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{array}{ll} \rightarrow \text{aus Punkt A:} & 1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ \rightarrow \text{aus Punkt B:} & \frac{5}{2} = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 - c \\ \rightarrow \text{aus Punkt C:} & 5 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c \end{array}$$

Löst man dieses Gleichungssystem (mögliche Verfahren: Einsetzverfahren, Gaussches Eliminationsverfahren, Additionsverfahren) so erhält man:

$$a = \frac{1}{2} \qquad b = -1 \qquad c = 1$$

$$\rightarrow \text{Funktionsgleichung der Parabel: } \underline{\underline{y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1}}$$

(b) → Zunächst überlegt man, für welche x-Werte die Funktionswerte gleich $\frac{3}{2}$ sind:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &= \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \\ 0 &= \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Die Parabel ist nach oben geöffnet, und besitzt an den Stellen $x = 1 + \sqrt{2}$ sowie $x = 1 - \sqrt{2}$ jeweils den Funktionswert $y = \frac{3}{2}$.

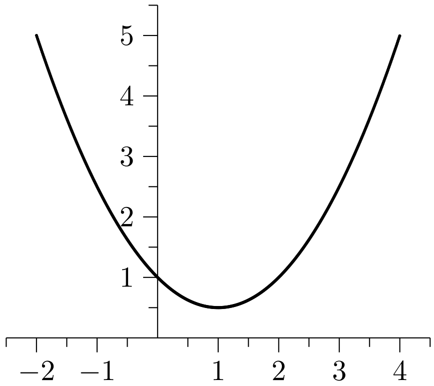
→ y ist größer als $\frac{3}{2}$ für $\underline{\underline{x_1 < 1 - \sqrt{2}}}$ und $\underline{\underline{x_2 > 1 + \sqrt{2}}}$.

(c)

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \\ y &= \frac{1}{2} \cdot \left[x^2 - 2x + 2\right] \\ y &= \frac{1}{2} \cdot \left[x^2 - 2x + (-1)^2 - (-1)^2 + 2\right] \\ y &= \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{Der Scheitel der Parabel liegt bei: } \underline{\underline{S\left(1 | \frac{1}{2}\right)}}$$

(d)



4. $y = 2x^2 - 12x + 20$

5.

gegeben	$y = 7x^2 - 14x - 7$
Faktor vor x^2 ausklammern	$y = 7 \cdot [x^2 - 2x - 1]$
quadratisch ergänzen	$y = 7 \cdot [x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 - 1]$
binomische Formel anwenden	$y = 7 \cdot [(x-1)^2 - 2]$
Zusammenfassen	$y = 7 \cdot (x-1)^2 - 14$

6.

Ansatz	$3 = 2x^2 + 2$
nach x auflösen	$x = \pm\sqrt{0,5}$

$\rightarrow$ D. h. bei $x = \pm\sqrt{0,5}$ beträgt der zugehörige y-Wert des Graphen 3. Die Parabel ist nach oben geöffnet. Deshalb sind alle Funktionswerte der Parabel für $-\sqrt{0,5} < x < \sqrt{0,5}$ kleiner als 3.

7.

(I) Aus Punkt A	$-11 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c$
(II) Aus Punkt B	$-2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$
(III) Aus Punkt C	$-15 = a \cdot (2)^2 + b \cdot (2) + c$

Gaußsches Eliminationsverfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & -11 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & -15 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & -11 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & -11 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right)$$

Aus letzter Zeile: $-3 \cdot c = -9 \quad \rightarrow \quad c = 3$
Aus mittlerer Zeile: $-6b - 3 \cdot 3 = -3 \quad \rightarrow \quad b = -1$
Aus erster Zeile: $4a - 2 \cdot (-1) + 3 = -11 \quad \rightarrow \quad a = -4$

$\Rightarrow \quad y = -4x^2 - 1x + 3$
$\Rightarrow \quad y = -4 \cdot \left(x + \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{49}{16}$

3.5 Quadratische Gleichungen

Soll der Schnittpunkt einer Parabel mit der x-Achse berechnet werden, so kann es allein aus der Anschauung bereits mehrere Lösungsmöglichkeiten geben:

- Keine Lösung:
  - der Scheitel liegt oberhalb der x-Achse; die Parabel ist nach oben geöffnet
  - der Scheitel liegt unterhalb der x-Achse; die Parabel ist nach unten geöffnet
- Eine Lösung:
  - der Scheitel der Parabel liegt genau auf der x-Achse; es ist egal ob diese nach oben oder unten geöffnet ist.
- Zwei Lösungen:
  - der Scheitel liegt oberhalb der x-Achse; die Parabel ist nach unten geöffnet
  - der Scheitel liegt unterhalb der x-Achse; die Parabel ist nach oben geöffnet

Um nun die Nullstellen der quadratischen Funktion, also den Schnittpunkt des Graphen mit der x-Achse, zu berechnen, kann man sich überlegen, dass an diesen Punkten die y-Koordinate auf jeden Fall Null sein muss.

Eine Gleichung mit der Definitionsmenge $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{G}$ heißt quadratisch oder zweiten Grades, wenn sie auf die Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbf{R} \quad \wedge \quad a \neq 0$ gebracht werden kann. Man nennt dies die Hauptform.

Diese quadratische Gleichung lässt sich durch quadratische Ergänzung lösen:

$$\begin{array}{ll}
 & 0 = ax^2 + bx + c \\
\text{durch a teilen} & 0 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \\
\text{quadrat. ergänzen} & 0 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \\
\text{Hauptnenner} & 0 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} \\
\text{Gleichung umstellen} & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \\
\text{Wurzel ziehen} & x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \\
\text{nach x auflösen} & x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \\
\text{Lösungsformel} & x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{array}$$

Wie bereits oben erwähnt kann es hierbei keine, eine oder zwei Lösungen geben. Dies hängt vom Wert unter der Wurzel, der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ ab.

- Keine Lösung: $D < 0$ → Es müsste die Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen werden!
- Eine Lösung: $D = 0$ → Das Plus-Minus hat keine Bedeutung mehr, da der Wert Null einmal zum $-b$ addiert, und einmal davon subtrahiert würde.
- Zwei Lösungen $D > 0$ → Nun kommt das Plus-Minus Zeichen zur Geltung.

Zerlegung in Linearfaktoren

Jede quadratische Gleichung kann in die so genannte Normalform $x^2+px+q = 0$ gebracht werden.

Zwischen den Lösungen der quadratischen Gleichung und ihren Koeffizienten p und q gilt dann stets ein fester Zusammenhang:

Satz von Vieta
Hat die quadratische Gleichung $x^2+px+q = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, so gilt:

$$x_1 + x_2 = -p \qquad \text{und} \qquad x_1 \cdot x_2 = q$$

Damit kann die quadratische Gleichung umgeformt werden:

$$\begin{array}{lr} & x^2 + px + q = 0 \\ \text{p und q ersetzen} & x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0 \\ \text{Klammern ausmultiplizieren} & x^2 - x_1x - x_2x + x_1 \cdot x_2 = 0 \\ x \text{ und } x_2 \text{ ausklammern} & x \cdot (x - x_1) - x_2 \cdot (x - x_1) = 0 \\ (x - x_1) \text{ ausklammern} & (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \qquad \underline{\underline{x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)}}$$

Mit Hilfe der Lösungen x_1 und x_2 kann demnach die als Summe dargestellte Normalform der quadratischen Gleichung in ein Produkt zerlegt werden. Da die Variable x in beiden Faktoren jeweils nur mit der Potenz 1 vorkommt, heißen sowohl $(x - x_1)$, als auch $(x - x_2)$ Linearfaktoren.

Beispiele

- Stellen Sie die quadratische Gleichung $x^2 + 9x - 10 = 0$ als Produkt dar.

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_{1/2} &= \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} \\ x_{1/2} &= -4,5 \pm 5,5 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \underline{\underline{(x-1) \cdot (x+10) = 0}}$$

- Eine Lösung der quadratischen Gleichung $3x^2 - 9x + 6 = 0$ lautet $x_1 = 2$ Geben Sie die Linearfaktoren der Gleichung an.

$\rightarrow$ Gleichung in Normalform bringen: $x^2 - 3x + 2 = 0$
$\rightarrow$ Satz von Vieta anwenden:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p \qquad \text{oder} \qquad & x_1 \cdot x_2 &= q \\ 2 + x_2 &= 3 & 2 \cdot x_2 &= q \\ x_2 &= 1 & x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Linearfaktoren: $\underline{\underline{(x-2)}}$ und $\underline{\underline{(x_1-1)}}$

- Zerlegen Sie die quadratische Gleichung $2x^2 - 6m \cdot x + 8 = 0$ in Linearfaktoren.

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_{1/2} &= \frac{-(-6m) \pm \sqrt{(-6m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2} \\ x_{1/2} &= \frac{6m \pm \sqrt{36m^2 - 64}}{4} \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Fallunterscheidung wird notwendig, da Parameter in Diskriminante.

Fall 1: $36m^2 - 64 < 0 \quad \rightarrow \quad m < \frac{4}{3}$
Diskriminante ist kleiner Null $\rightarrow$ keine Lösung $\rightarrow$ $\mathbf{L} = \{\,\}$
Zerlegung in Linearfaktoren ist nicht möglich

Fall 2: $36m^2 - 64 = 0 \quad \rightarrow \quad m = \frac{4}{3}$
Diskriminante ist gleich Null $\rightarrow$ eine Lösung $\rightarrow$ $x_1 = x_2 = 2$
Zerlegung in Linearfaktoren: $(x-2) \cdot (x-2) = (x-2)^2$

Fall 3: $36m^2 - 64 > 0 \qquad \rightarrow \qquad m > \frac{4}{3}$
Diskriminante ist größer Null → zwei Lösungen

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{2}m + \sqrt{2,25m^2 - 4} \\ x_2 &= \frac{3}{2}m - \sqrt{2,25m^2 - 4} \end{aligned}$$

Zerlegung in Linearfaktoren:

$$(x-x_1)\cdot(x-x_2) = \left(x - \frac{3}{2}m - \sqrt{2,25m^2-4}\right)\cdot\left(x - \frac{3}{2}m + \sqrt{2,25m^2-4}\right)$$

3.6 Quadratische Ungleichungen

Eine Ungleichung über der Definitionsmenge $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{G}$ heißt quadratisch oder zweiten Grades, wenn sie die Form $ax^2 + bx + c < 0$ bzw. $ax^2 + bx + c > 0$ (mit $a \neq 0$) hat.

Lösung durch Fallunterscheidung:
Ein Produkt ist stets dann größer Null, wenn **beide** Faktoren größer, oder **beide** Faktoren kleiner Null sind.

$$a \cdot b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$$

Beispiele:

- $(x-2)\cdot(x-4) > 0$
  Fallunterscheidung:
  Fall 1: $x - 2 > 0 \quad \wedge \quad x - 4 > 0$
  $x > 2 \quad \wedge \quad x > 4$
  $\mathbf{L}_1 = \{x | x > 4\}$

  Fall 2: $x - 2 < 0 \quad \wedge \quad x - 4 < 0$
  $x < 2 \quad \wedge \quad x < 4$
  $\mathbf{L}_2 = \{x | x < 2\}$

  Vereinigung der Teillösungen:

  $$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2 = \{x | x < 2 \wedge x > 4\} = \mathbf{R}\backslash[2;4]$$

- $(x + \frac{5}{2}) \cdot (x - \frac{3}{2}) \leq 0$
  Fallunterscheidung:
  Fall 1: $x + \frac{5}{2} \leq 0 \quad \wedge \quad x - \frac{3}{2} \geq 0$
  $x \leq -\frac{5}{2} \quad \wedge \quad x \geq \frac{3}{2}$

$\mathbf{L}_1 = \{\,\}$

Fall 2: $x + \frac{5}{2} \geq 0 \quad \wedge \quad x - \frac{3}{2} \leq 0$
$x \geq -\frac{5}{2} \quad \wedge \quad x \leq \frac{3}{2}$
$\mathbf{L}_2 = \left[-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right]$

Vereinigung der Teillösungen:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2 = \left[-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right]$$

Übungsaufgaben

1. **Aufgaben zu Linearfaktoren**
   Siehe auch Beispiele im Buch S. 84
   Zerlegen Sie folgende quadratische Terme in Linearfaktoren:

   (a) $T(x) = x^2 + x - 6$
   (b) $T(x) = 25x^2 - 9$
   (c) $T(x) = 6x^2 - 13x - 5$
   (d) $T(x) = -20x^2 + 14x - 2$
   (e) $T(x) = 10x^2 - 3x - 4$

2. **Aufgaben zu Diskriminante**
   Siehe auch Beispiel im Buch S. 82 oben
   Bestimmen Sie die Werte des Parameters $k \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$, für die die Gleichungen zwei, genau eine bzw. keine Lösungen haben.

   (a) $2x^2 + 4x - 3k = 0$
   (b) $kx^2 + 6x + 1 = 0$
   (c) $4x^2 + 3kx - k^2 = 0$
   (d) $kx^2 - x + \frac{1}{3} = 0$

3. **Aufgaben zu quadratischen Ungleichungen**
   Siehe auch Beispiele im Buch S. 91f
   Lösen Sie folgende Ungleichungen, indem Sie den quadratischen Term in Linearfaktoren zerlegen.

   (a) $x^2 - 14x + 24 > 0$
   (b) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 10 \geq 0$
   (c) $-x^2 + \frac{19}{3}x - 2 < 0$
   (d) $\frac{1}{4}x^2 + 5x + 18{,}75 \leq 0$

   Lösen Sie folgende Ungleichungen mit Hilfe einer Vorzeichentabelle.

   (a) $x^2 - 3x + 2 > 0$
   (b) $x^2 + 2x - 35 > 0$
   (c) $x^2 - x + 5 \leq 0$
   (d) $x^2 - 10x + 21 < 0$

4. **Aufgaben zu Umkehrfunktionen**
   Siehe auch Beispiel im Buch S. 97
   Berechnen Sie die Umkehrfunktionen f^{-1} folgender Funktionen f, geben Sie den Definitionsbereich der Umkehrfunktion an, und zeichnen Sie jeweils die Graphen von f und f^{-1} in ein gemeinsames Koordinatensystem.

   (a) $f : x \mapsto 2x^2 \qquad x \in \mathbf{R}_0^+$

(b) $f: x \mapsto -0,5x^2 \qquad x \in \mathbf{R}_0^-$
(c) $f: x \mapsto x^2 \qquad x \in [1; 2,5]$
(d) $f: x \mapsto x^2 - 2x \qquad x \in [1; +\infty[$
(e) $f: x \mapsto 2x^2 - 1 \qquad x \in \mathbf{R}_0^+$
(f) $f: x \mapsto -x^2 + 2 \qquad x \in \mathbf{R}^-$
(g) $f: x \mapsto 4x^2 + 4x + 1 \qquad x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$
(h) $f: x \mapsto x^2 - 2x + 1 \qquad x \in [1; +\infty[$
(i) $f: x \mapsto -x^2 - 2x + 1 \qquad x \in [-1; +\infty[$
(j) $f: x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{x} \qquad x \in \mathbf{R}_0^+$
(k) $f: x \mapsto 2\sqrt{x} + 1 \qquad x \in \mathbf{R}_0^+$
(l) $f: x \mapsto \sqrt{x+1} - 1 \qquad x \in [-1; +\infty[$
(m) $f: x \mapsto \frac{4}{5}\sqrt{x-1} - 1,5 \qquad x \in [1; +\infty[$

Lösungen

1. (a) $x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6))}}{2 \cdot 1} \quad \rightarrow \quad T(x) = (x-2)(x+3)$

   (b) $x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} \quad \rightarrow \quad T(x) = \left(x - \frac{3}{5}\right)\left(x + \frac{3}{5}\right)$

   (c) $x_{1/2} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{((-13)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-5))}}{2 \cdot 6} \quad \rightarrow \quad T(x) = (x - 2,5)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

   (d) $x_{1/2} = \frac{-14 \pm \sqrt{(14^2 - 4 \cdot (-20) \cdot (-2))}}{2 \cdot (-20)} \quad \rightarrow \quad T(x) = \left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

   (e) $x_{1/2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{((-3)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-4))}}{2 \cdot 10} \quad \rightarrow \quad T(x) = \left(x - \frac{4}{5}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

2. (a) Diskriminante: $D = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3k)$

Keine Lösung für:	$D < 0$	$\leftrightarrow$	$k < -\frac{2}{3}$
Eine Lösung für:	$D = 0$	$\leftrightarrow$	$k = -\frac{2}{3}$
Zwei Lösungen für:	$D > 0$	$\leftrightarrow$	$k > -\frac{2}{3}$

   (b) Diskriminante: $D = 6^2 - 4 \cdot k \cdot 1$

Keine Lösung für:	$D < 0$	$\leftrightarrow$	$k > 9$
Eine Lösung für:	$D = 0$	$\leftrightarrow$	$k = 9$
Zwei Lösungen für:	$D > 0$	$\leftrightarrow$	$k < 9$

(c) Diskriminante: $D = (3k)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-k^2)$

Keine Lösung für:	$D < 0$	$\leftrightarrow$	nicht möglich
Eine Lösung für:	$D = 0$	$\leftrightarrow$	$k = 0$
Zwei Lösungen für:	$D > 0$	$\leftrightarrow$	$k \in \mathbf{R} \backslash \{0\}$

(d) Diskriminante: $D = (-1)^2 - 4 \cdot k4 \cdot \frac{1}{3}$

Keine Lösung für:	$D < 0$	$\leftrightarrow$	$k > \frac{3}{4}$
Eine Lösung für:	$D = 0$	$\leftrightarrow$	$k = \frac{3}{4}$
Zwei Lösungen für:	$D > 0$	$\leftrightarrow$	$k < \frac{3}{4}$

3. (a) Quadratische Gleichung mit Linearfaktoren: $(x - 12)(x - 2) > 0$
$x - 12 > 0 \quad \wedge \quad x - 2 > 0$ oder $x - 12 < 0 \quad \wedge \quad x - 2 < 0$
$\rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{R} \backslash [2; 12]$

(b) Quadratische Gleichung mit Linearfaktoren: $(x - 4)(x + 10) \geq 0$
$x - 4 \geq 0 \quad \wedge \quad x + 10 \geq 0$ oder $x - 4 \leq 0 \quad \wedge \quad x + 10 \leq 0$
$\rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{R} \backslash [-10; 4]$

(c) Quadratische Gleichung mit Linearfaktoren: $\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 6) > 0$
$x - \frac{1}{3} > 0 \quad \wedge \quad x - 6 > 0$ oder $x - \frac{1}{3} < 0 \quad \wedge \quad x - 6 < 0$
$\rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{R} \backslash \left[-\frac{1}{3}; 6\right]$

(d) Quadratische Gleichung mit Linearfaktoren: $(x + 5)(x + 15) \leq 0$
$x + 5 \geq 0 \quad \wedge \quad x + 15 \leq 0$ oder $x + 5 \leq 0 \quad \wedge \quad x + 15 \geq 0$
$\rightarrow \mathbf{L} = [-15; -5]$

(a) Nullstellen: $x_{1/2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$
Parabel ist nach oben geöffnet

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
sgn(y)	+1	0	−1	0	+1

$\rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{L} = \mathbf{R} \backslash [1; 2]}}$

(b) Nullstellen: $x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-35)}}{2 \cdot 1}$
Parabel ist nach oben geöffnet

x	$-\infty$	−7		5	$+\infty$
sgn(y)	+1	0	−1	0	+1

$\rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{L} = \mathbf{R} \backslash [-7; 5]}}$

(c) Nullstellen: $x_{1/2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$
$\rightarrow$ Diskriminante ist kleiner Null, d. h. es gibt keine Nullstelle. Da Parabel nach oben geöffnet ist gibt es damit auch keinen Wert kleiner als Null.

$\rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{\,\}}}$

(d) Nullstellen: $x_{1/2} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21}}{2 \cdot 1}$
Parabel ist nach oben geöffnet

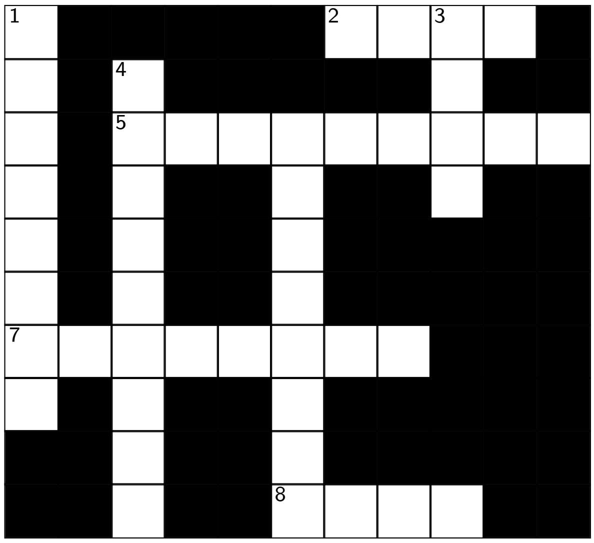
x	$-\infty$	3		7	$+\infty$
$\mathrm{sgn}(y)$	$+1$	0	-1	0	$+1$

$\rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{x|3 < x < 7\}}}$

4. (a) $f^{-1}: x \mapsto \sqrt{\frac{x}{2}} \qquad x \in \mathbf{R}_0^+$
   (b) $f^{-1}: x \mapsto -\sqrt{-2x} \qquad x \in \mathbf{R}_0^-$
   (c) $f^{-1}: x \mapsto \sqrt{x} \qquad x \in [1; 6,25]$
   (d) $f^{-1}: x \mapsto 1 + \sqrt{1+y} \qquad x \in [-1; +\infty[$
   (e) $f^{-1}: x \mapsto \sqrt{0,5(x-1)} \qquad x \in -1; +\infty[$
   (f) $f^{-1}: x \mapsto -\sqrt{-(x-2)} \qquad x \in]-\infty; 2[$
   (g) $f^{-1}: x \mapsto -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{x} \qquad x \in]0; \infty[$
   (h) $f^{-1}: x \mapsto 1 + \sqrt{x} \qquad x \in [0; \infty[$
   (i) $f^{-1}: x \mapsto -1 + \sqrt{2-x} \qquad x \in]-\infty; 2[$
   (j) $f^{-1}: x \mapsto 4x^2 \qquad x \in \mathbf{R}_0^+$
   (k) $f^{-1}: x \mapsto \frac{1}{4}(x-1)^2 \qquad x \in [1; +\infty[$
   (l) $f^{-1}: x \mapsto (x+1)^2 - 1 \qquad x \in [-1; +\infty[$
   (m) $f^{-1}: x \mapsto \frac{25}{16}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 1 \qquad x \in [-1,5; +\infty[$

Quadratische Funktionen

Kreuzworträtsel



Waagrecht

2 In welche Richtung ist eine Normalparabel geöffnet?

5 Wie nennt man bei einer nach oben geöffneten Parabel den Punkt mit dem kleinsten y-Wert?

7 Jede Parabel hat einen höchsten, bzw. einen tiefsten Punkt. Wie wird dieser allgemein bezeichnet?

8 Welchen y-Wert hat der Scheitel bei der quadratischen Funktion $y = 4x^2 + 9$?

Senkrecht

1 Wie nennt man den Schnittpunkt eines Graphen mit der x-Achse?

3 Welchen Wert hat die x-Koordinate des Scheitels der quadratischen Funktion $y = 3(x-1)^2 + 5$?

4 Das quadratische Glied einer quadratischen Funktion wird mit einem Wert kleiner eins multipliziert. Was geschieht mit der Kurve (Substantiv angeben)?

6 Wie lautet der mathematische Fachbegriff für „Zuordnungsvorschrift“?

Quadratische Funktionen

Kreuzworträtsel

1 A						2 O	B	3 E	N	
B		4 S						I		
S		5 T	I	E	F	P	U	N	K	T
Z		A			U			S		
I		U			N					
S		C			K					
7 S	C	H	E	I	T	E	L			
E		U			I					
		N			O					
		G			8 N	E	U	N		

Waagrecht

2 In welche Richtung ist eine Normalparabel geöffnet?

5 Wie nennt man bei einer nach oben geöffneten Parabel den Punkt mit dem kleinsten y-Wert?

7 Jede Parabel hat einen höchsten, bzw. einen tiefsten Punkt. Wie wird dieser allgemein bezeichnet?

8 Welchen y-Wert hat der Scheitel bei der quadratischen Funktion $y = 4x^2 + 9$?

Senkrecht

1 Wie nennt man den Schnittpunkt eines Graphen mit der x-Achse?

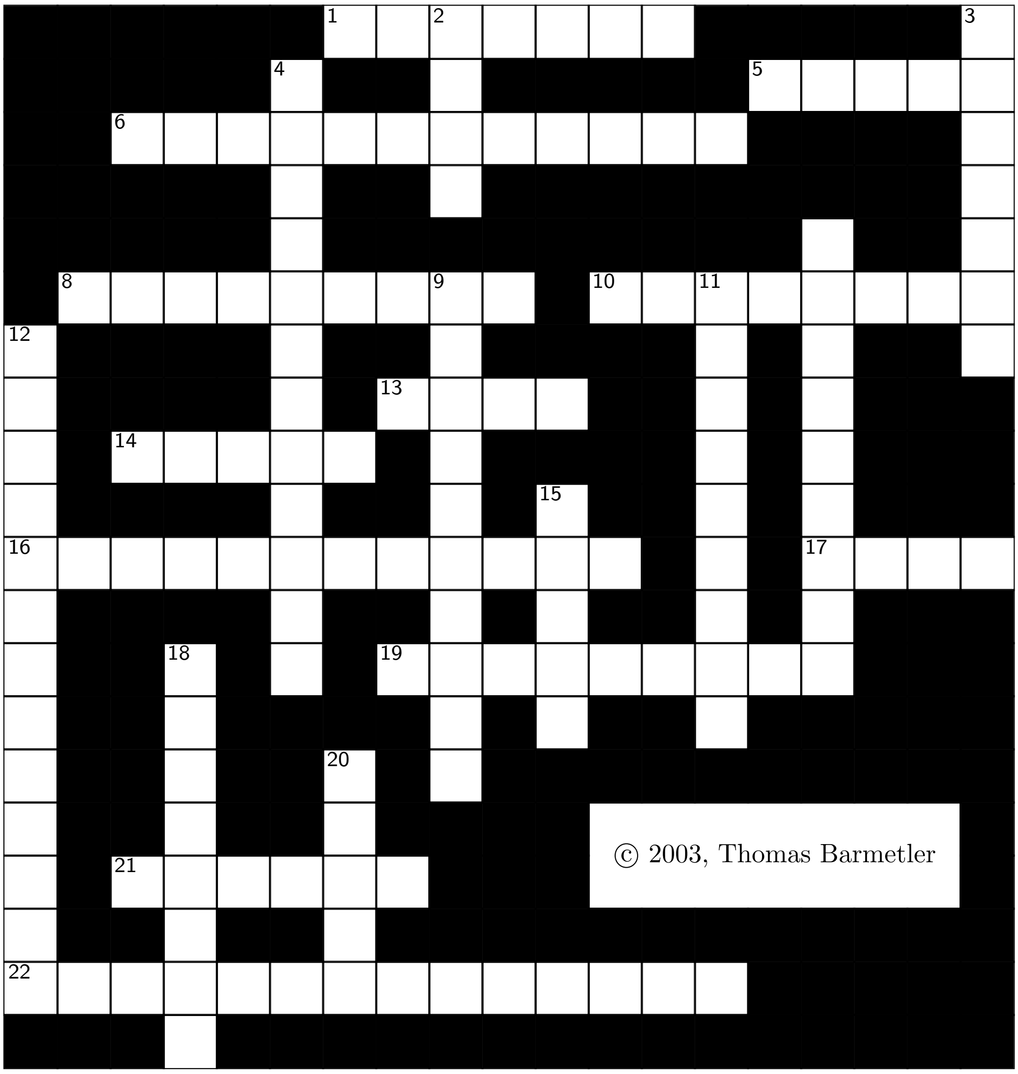
3 Welchen Wert hat die x-Koordinate des Scheitels der quadratischen Funktion $y = 3(x-1)^2 + 5$?

4 Das quadratische Glied einer quadratischen Funktion wird mit einem Wert kleiner eins multipliziert. Was geschieht mit der Kurve (Substantiv angeben)?

6 Wie lautet der mathematische Fachbegriff für „Zuordnungsvorschrift“?

Quadratische Funktionen

Kreuzworträtsel



Quadratische Funktionen

Kreuzworträtsel

						1 P	R	2 O	D	U	K	T						3 P
					4 V			B						5 V	I	E	T	A
		6 S	C	H	E	I	T	E	L	F	O	R	M					R
					R			N										A
					S										T			B
	8 S	T	R	E	C	K	U	9 N	G		10 A	B	11 S	Z	I	S	S	E
12 N					H			O					T		E			L
O					I		13 D	R	E	I			A		F			
R		14 U	N	T	E	N		M					U		P			
M					B			A		15 S			C		U			
16 A	B	S	O	L	U	T	G	L	I	E	D		H		17 N	E	U	N
L					N			F		C			U		K			
P			18 S		G		19 H	O	C	H	P	U	N	K	T			
A			C					R		S			G					
R			H			20 F		M										
A			E			U												
B		21 S	I	E	B	E	N											
E			T			N												
22 L	I	N	E	A	R	F	A	K	T	O	R	E	N					
			L															

Quadratische Funktionen

Kreuzworträtsel - Angaben

Waagrecht

1 Im Term $ax^2 + bx + c$ ist eine Parabel durch eine Summe ausgedrückt. Wie kann man die Parabel noch angeben?

5 Eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat die Lösungen x_1 und x_2. Nach wem wurde der Zusammenhang $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$ benannt?

6 Wie muss die Funktion einer Parabel gegeben sein damit die Koordinaten des Scheitels direkt abzulesen sind?

8 Was bewirkt der Faktor a in der Funktion $y = a(x - x_S)^2 + y_S$ falls er größer als 1 ist?

10 Wie nennt man den Schnittpunkt eines Graphen mit der x-Achse?

13 Um wieviel Einheiten ist die Parabel $y = 2(x-3)^2 + 1$ nach rechts verschoben?

14 In welche Richtung ist der Graph der Funktion $f(x) = -4x^2 + 4x + 4$ geöffnet?

16 Geben Sie eine andere Bezeichnung für das konstante Glied einer quadratischen Funktion an. 17 Welchen y-Wert hat der Scheitel bei der quadratischen Funktion $y = 4x^2 + 9$?

19 Wie nennt man den Punkt eines Graphen mit dem größten x-Wert?

21 Wie lautet die y-Koordinate der Parabel $f(x) = -3(x+4)^2 + 7$?

22 Eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ kann auch als Produkt dargestellt werden. Wie nennt man die Faktoren?

Senkrecht

2 In welche Richtung ist eine Normalparabel geöffnet?

3 Wie nennt man den Graph einer quadratischen Funktion?

4 Was bewirkt das konstante Glied in der Funktion $y = 2x^2 + 3$?

7 Geben Sie die Bezeichnung für den Punkt eines Graphen mit dem kleinsten y-Wert an.

9 Die Funktion einer Parabel ist mit $y = ax^2 + bx + c$ angegeben. Wie bezeichnet man diese Form?

11 Die quadratische Funktion $f(x) = x^2$ wird mit dem Faktor $0,25$ multipliziert. Was ist die Folge?

12 Wie nennt man den Graphen der Funktion $y = x^2$?

15 Um welchen Faktor wird die Parabel $f(x) = 6(x-3)^2 - 5$ gestreckt?

18 Jede Parabel mit **D**=**R** hat einen höchsten oder einen tiefsten Punkt. Wie nennt man diesen?

20 Um wieviel Einheiten muss die Parabel $y = x^2 - 1$ nach rechts verschoben werden damit ihr Scheitel deckungsgleich mit dem Tiefpunkt der Parabel $f(x) = 2x^2 + 4$ liegt?