4 Ganzrationale Funktionen

4.1 Polynomfunktionen

Eine Funktion, die man auf die Form $f : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ mit $x \in \mathbf{R}$ bringen kann, heißt ganzrationale Funktion n-ten Grades.

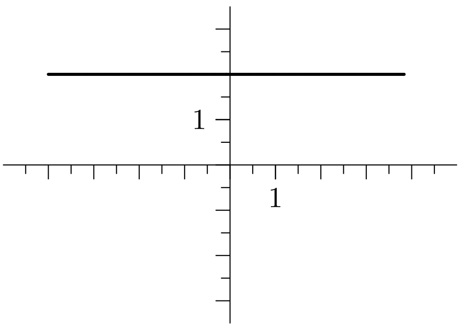
Dabei sind alle Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ mit $a_n \neq 0$ reelle Konstanten. Der Funktionsterm wird Polynom n-ten Grades genannt.

Es gilt, dass

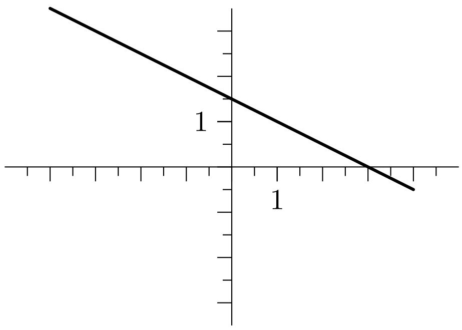
- die ganzrationale Funktion ersten Grades $f(x) = a_1 x + a_0$ mit der linearen Funktion $f(x) = mx + t$ identisch ist.
- die ganzrationale Funktion zweiten Grades $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ mit der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ übereinstimmt.
- jede Potenzfunktion $f(x) = x^2$ mit $n \in \mathbf{N}^*$ eine ganzrationale Funktion ist.

Beispiele für ganzrationale Funktionen:

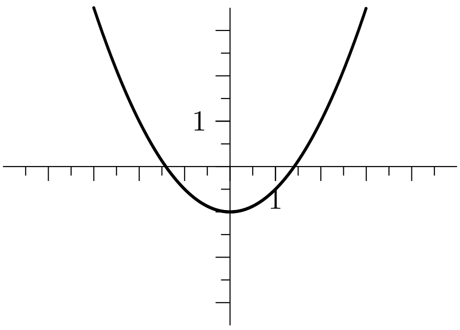
Grad 0:
$f(x) = 2$



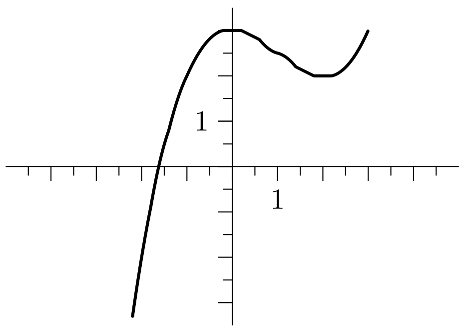
Grad 1:
$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$



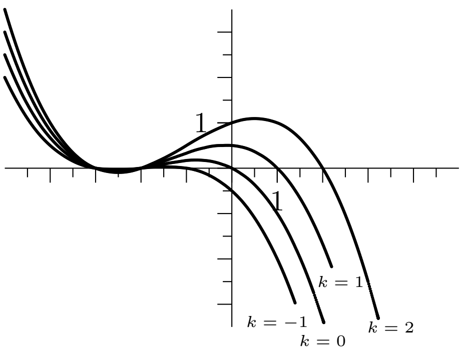
Grad 2:
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$



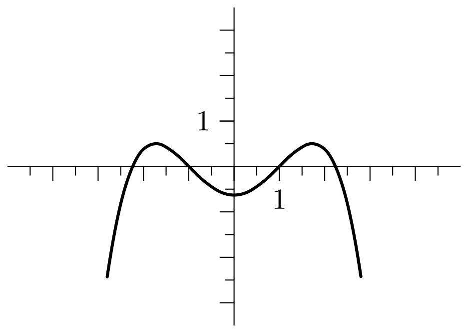
Grad 3:
$f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 3x^2 + 12)$



Grad 3 mit Parameter k:
$f(x) = -\frac{1}{12}(x^3 + (5-k)x^2 + (6-5k)x - 6k)$



Grad 4:
$f(x) = -\frac{1}{8}(x^4 - 6x^2 + 5)$



Welche Aussagen können nun über eine Funktion wie folgende gemacht werden?

$$f(x) : y = x^2 + 8x + 15$$

Da es ein Polynom zweiten Grades ist, kann man vermuten dass der Graph symmetrisch zu einer senkrechten Achse liegt. Weil jedoch auch ungerade Exponenten vorkommen kann es sich auf keinen Fall um die y-Achse handeln.

Deshalb wird nun versucht das Koordinatensystem so zu verschieben, dass die neue y-Achse mit der Spiegelachse übereinstimmt. In der Folge müsste die Funktion im neuen Koordinatensystem eine Funktionsgleichung haben, in der ausschließlich gerade Exponenten vorkommen.

Beweis:

1. **Berechnung der Scheitelform**

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 8x + 15 \\ y &= x^2 + 8x + 4^2 - 4^2 + 15 \\ y &= (x+4)^2 - 1 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Scheitelpunkt $S(-4|-1)$

2. **Lineare Koordinatentransformation**
   Das neue Koordinatensystem $\overline{x}/\overline{y}$ soll seinen Ursprung im Scheitel des Graphen haben. Deshalb muss die x-Achse um 1 Einheit nach unten, und die y-Achse um 4 Einheiten nach links verschoben werden.

   $$\begin{array}{lcr} \overline{x} = x - x_S & & \overline{y} = y - y_S \\ \overline{x} = x + 4 & \text{Transformationsgleichungen} & \overline{y} = y + 1 = \end{array}$$

3. **Transformationsgleichungen in Scheitelgleichungen einsetzen**

   $$\begin{aligned} y &= (x+4)^2 - 1 \\ \overline{y} - 1 &= ([\overline{x} - 4] + 4)^2 - 1 \\ \overline{y} &= \overline{x}^2 \end{aligned}$$

   → Die Funktion ist im neuen Koordinatensystem achsensymmetrisch zur $\overline{y}$-Achse.
   → Die Funktion war im alten Koordinatensystem achsensymmetrisch zur Geraden $x = -4$.

Ähnliche Überlegungen sollen nun bei einer Polynomfunktion 3.Grades angestellt werden. Auch hier sollen Aussagen bezüglich der Symmetrie der Funktion gemacht werden. Diese ist wie folgt gegeben:

$$f(x) : x \mapsto x^3 + 3x^2 + 5x + 6$$

Vorgehensweise:

1. **Aus der Formelsammlung: Binomische Formel dritten Grades**

   $$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

2. **Koeffizientenverlgeich von $3x^2$ mit $3ax^2$:**

   $$3x^2 = 3ax^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 3a \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$$

3. **Kubische Ergänzung vornehmen:**

   $$y = x^3 + 3x^2 + \underbrace{(5x - 2x)}_{=3a^2x} + 2x + 6$$

4. **Zusammenfassen:**

   $$y = (x+1)^3 + 2x + 5$$

5. **Die beiden letzten Glieder geeignet erweitern bzw. umstellen:**

   $$\begin{aligned} y &= (x+1)^3 + 2x + 2 + 3 \\ y &= (x+1)^3 + 2(x+1) + 3 \\ y - 3 &= (x+1)^3 + 2(x+1) \end{aligned}$$

6. **Transformationsgleichungen aufstellen:**

$$\overline{y} = y - 3 \qquad \overline{x} = x + 1$$

7. **Funktionsgleichung im neuen Koordinatensystem angeben:**

$$\overline{y} = \overline{x}^3 + 2\overline{x}$$

$\rightarrow$ Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung im neuen $\overline{x}$-$\overline{y}$-Koordinatensystem.
$\rightarrow$ Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Punkt $P(-1|3)$ im ursprünglichen x-y-Koordinatensystem.

Da die kubische Ergänzung bei Polynomfunktionen 3. Grades immer durchgeführt werden kann, ist jede ganzrationale Funktion 3. Grades punktsymmetrisch zu einem bestimmten Punkt P (jedoch nicht zwangsläufig zum Ursprung!)

Beispiele:

1. Untersuchen Sie nachfolgende Funktionen auf Symmetrie.
   (a) $f : x \mapsto 4x^4 - 2x^2 + 1$
   (b) $f : x \mapsto x^3 - 5x + 1$
   (c) $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + x$
   (d) $f : x \mapsto -3x^6 - 5x^4$
   (e) $f : x \mapsto -\frac{1}{7}x^6 - \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{6}$
   (f) $f : x \mapsto 8x^5 - 10x^3 + 16x$
   (g) $f : x \mapsto 2x^4 + 5x^2 \qquad x \in [-2; 5]$
   (h) $f : x \mapsto 3x^7 - 4x^3 \qquad x \in [1; 4]$
   (i) $f_k : x \mapsto k^2x^3 - 2k^3x$
   (j) $f_k : x \mapsto (1-k)x^4 - k^2x^2 + k^3 - 3$
   (k) $f_k : x \mapsto (k^2-1)x^3 + kx^2 + (1+k)x$
2. Untersuchen Sie die Funktion $y = 3x^2 + 12x + 16$ auf Symmetrie.

Lösungen:

1. (a) Achsensymmetrisch zur y-Achse, da alle Exponenten gerade.
   (b) Da Funktion 3. Grades ist sie auf jeden Fall punktsymmetrisch. Da jedoch auch ein gerader Exponent vorkommt, besteht keine Punktsymmetrie zum Ursprung!
   $\rightarrow$ Koordinatentransformation mit dem Ziel nur ungerade Exponenten im Funktionsterm zu erhalten.

$$\begin{aligned} y &= x^3 - 5x + 1 \\ y - 1 &= x^3 - 5x \\ \overline{y} &= \overline{x}^3 - 5\overline{x} \end{aligned}$$

   $\rightarrow$ Transformationsgleichungen: $\overline{y} = y - 1 \qquad \overline{x} = x$
   $\rightarrow$ Punktsymmetrie zu $P(0|1)$
   (c) Nur ungerade Exponenten $\rightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung
   (d) Nur gerade Exponenten $\rightarrow$ Achsensymmetrie zur y-Achse
   (e) Nur gerade Exponenten $\rightarrow$ Achsensymmetrie zur y-Achse
   (f) Nur ungerade Exponenten $\rightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung
   (g) Keine Symmetrie zur y-Achse, da **D** nicht symmetrisch zur y-Achse.
   (h) Keine Punktsymmetrie zum Ursprung, da **D** nicht symmetrisch zur y-Achse.
   (i) Punktsymmetrie zum Ursprung (unabhängig von k)

(j) Achsensymmetrisch zur y-Achse (unabhängig von k)

(k) Achsensymmetrisch zur y-Achse für $k = -1$
Punktsymmetrisch zum Ursprung für $k = 0$
Für alle anderen k ist keine Aussage möglich.

2.

$$\begin{aligned}
y &= 3x^2 + 12x + 16 \\
y &= 3 \cdot \left[x^2 + 4x + \frac{16}{3}\right] \\
y &= 3 \cdot \left[x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 + \frac{16}{3}\right] \\
y &= 3 \cdot (x+2)^2 + 4 \\
y - 4 &= 3 \cdot (x+2)^2
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Transformationsgleichungen: $\overline{x} = x + 2$
$\overline{y} = y - 4$

$\rightarrow$ Neue Funktionsgleichung: $\overline{y} = 3 \cdot \overline{x}^2$ ist im neuen $\overline{xy}$-Koordinatensystem achsensymmetrisch zur $\overline{y}$-Achse, da nur gerade Exponenten vorkommen.
$\rightarrow$ Im alten xy-Koordinatensystem war die Funktion zur Geraden $x = -2$ symmetrisch.

4.2 Operationen mit Polynomfunktionen

Polynomfunktionen kann man genauso addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren wie jede reelle Zahl. Darüber hinaus kann man sie auch noch verketten. Allerdings ist das sichere beherrschen der Regeln für das Potenzrechnen (siehe Seite 7) eine unabdingbare Voraussetzung um diese Rechenoperationen anzuwenden.

- **Verkettung**

$$\mathbf{f}: x \mapsto 8x^2 - 2x + 1 \qquad \mathbf{g}: x \mapsto 2x - 9$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{f} \circ \mathbf{g}: x \mapsto 8 \cdot (2. - 9)^2 - 2 \cdot (2x - 9) + 1$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{g} \circ \mathbf{f}: x \mapsto 2 \cdot (8x^2 - 2x + 1) - 9$$

- **Addition**

$$\mathbf{f}: x \mapsto -2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6 \qquad \mathbf{g}: x \mapsto \sqrt{3}x^2 + 2x + 1$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{f} + \mathbf{g}: x \mapsto -2x^3 + (\frac{1}{2} + \sqrt{3})x^2 + 2x - 5$$

- **Subtraktion**

$$\mathbf{f}: x \mapsto -x^6 + 2x^4 - 3x^3 \qquad \mathbf{g}: x \mapsto 4x^5 - x^4 + 2x^3 - 4$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{f} - \mathbf{g}: x \mapsto -x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 5x^3 + 4$$

- **Multiplikation**

$$\mathbf{f}: x \mapsto 2x + 1 \qquad \mathbf{g}: x \mapsto 4x^2 - x$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}: x \mapsto (2x + 1) \cdot (4x^2 - x) = 8x^3 + 2x^2 - x$$

- **Division** (siehe auch Polynomdivision S.64)

$$\mathbf{f}: x \mapsto 7x^3 - 2x^2 + x + 3 \qquad \mathbf{g}: x \mapsto x^2 - 6x + 9$$

$$\rightarrow \quad \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}: x \mapsto \frac{7x^3 - 2x^2 + x + 3}{x^2 - 6x + 9} = 7x + 40 + \frac{98x - 357}{x^2 - 6x + 9}$$

4.3 Polynomdivision

Werden zwei Polynome $P_1(x)$ und $P_2(x)$ dividiert, so gibt es zwei Möglichkeiten:

- Die Division geht ohne Rest auf:
$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = Q(x)$$
- Die Division geht nicht auf, und es bleibt ein Rest:
$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{P_2(x)}$$

Beispiele:

$$\begin{array}{l}
(2x^3 - 9x^2 + 13x - 12) : (x - 3) = \underline{\underline{2x^2 - 3x + 4}} \\
\underline{-(2x^3 - 6x^2)} \\
\quad - 3x^2 + 13x - 12 \\
\quad \underline{-(-3x^2 + 9x)} \\
\qquad\quad 4x - 12 \\
\qquad\quad \underline{-(4x - 12)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(-x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 14x - 10) : (x^2 + 2) = \underline{\underline{-x^3 + 2x^2 + 7x - 4 - \frac{2}{x^2 + 2}}} \\
\underline{-(-x^5 - 2x^3)} \\
\quad 2x^4 + 7x^3 + 14x - 10 \\
\quad \underline{-(2x^4 + 4x^2)} \\
\qquad 7x^3 - 4x^2 + 14x - 10 \\
\qquad \underline{-(7x^3 + 14x)} \\
\qquad\quad - 4x^2 - 10 \\
\qquad\quad \underline{-(-4x^2 - 8)} \\
\qquad\qquad - 2
\end{array}$$

4.4 Nullstellen von Polynomfunktionen

> Gegeben ist eine Polynomfunktion vom Grad n. Die Lösungen der zugehörigen Gleichung $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^{+}a_0 = 0$ heißen Nullstellen von f.

Geometrisch betrachtet sind die Nullstellen die Abszissen der Schnitt- oder Berührpunkte des Graphen mit der x-Achse.

Ist x_1 die Nullstelle einer Polynomfunktion $f(x)$ vom Grad n, dann ist folgende Zerlegung in Faktoren möglich:

$$f(x) = (x - x_1) \cdot g(x)$$

$f(x)$ ist also durch $(x - x_1)$ ohne Rest teilbar. Das Ergebnis dieser Division ist $g(x)$, was ein Polynom vom Grad $n - 1$ ist.

Lässt sich der Faktor $(x - x_1)$ m-mal aus $f(x)$ ausklammern, so nennt man x_1 eine m-fache Nullstelle. In diesem Fall gilt:

$$f(x) = (x - x_1)^m \cdot g(x)$$

Dabei ist $g(x)$ ein Polynom vom (n-m)-ten Grad, wobei $g(x_1) \neq 0$.

Ein Polynom vom Grad n kann in höchstens n lineare Faktoren zerlegt werden. Deshalb hat eine Funktion n-ten Grades höchstens n reelle Nullstellen, wobei mehrfache Nullstellen auch mehrfach gezählt werden.

4.4.1 Strategien zum Aufsuchen von Nullstellen

(a) Lineare Gleichung

Polynomfunktion 1. Grades	$f(x)$	$=$	$9x - 4$
Lineare Gleichung	0	$=$	$9x - 4$
Lösung der lin. Gleichung	x	$=$	$\frac{4}{9}$

$\rightarrow$ f hat die einfache Nullstelle: $x_1 = \frac{4}{9}$

(b) Reinquadratische Gleichung mit konstantem Glied

Polynomfunktion 2. Grades	$f(x)$	$=$	$\frac{16}{9}x^2 - 1$
Quadratische Gleichung	0	$=$	$\frac{16}{9}x^2 - 1$
umstellen	x^2	$=$	$\frac{9}{16}$
Wurzel ziehen	x	$=$	$\pm\frac{3}{4}$

$\rightarrow$ f hat zwei einfache Nullstellen: $x_1 = +\frac{3}{4}$ $\quad x_2 = -\frac{3}{4}$

$\rightarrow$ Linearfaktorzerlegung $f(x) = (x - \frac{3}{4}) \cdot (x + \frac{3}{4})$

(c) Reinquadratische Gleichung ohne konstantes Glied

Polynomfunktion 2. Grades	$f(x)$	$=$	$7x^2$
Quadratische Gleichung	0	$=$	$7x^2$
	x^2	$=$	0
Wurzel ziehen	x	$=$	± 0

$\rightarrow$ f hat die doppelte Nullstelle: $x_{1/2} = 0$
(auch Nullstelle 2. Ordnung genannt)

$\rightarrow$ Linearfaktorzerlegung $f(x) = 7 \cdot (x - 0)^2$

(d) Gemischt quadratische Gleichung

Polynomfunktion 2. Grades	$f(x)$	$=$	$x^2 - x - 6$
Quadratische Gleichung	0	$=$	$x^2 - x - 6$
Lösungsformel	$x_{1/2}$	$=$	$\frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$
	$x_{1/2}$	$=$	$\frac{1 \pm 5}{2}$

$\rightarrow$ f hat die einfachen Nullstellen: $x_1 = 3$ $\quad x_2 = -2$

$\rightarrow$ Linearfaktorzerlegung $f(x) = (x - 3) \cdot (x + 2)$

(e) Gleichung 3. Grades ohne konstantes Glied

Polynomfunktion 3. Grades	$f(x)$	$=$	$2x^3 - 6x^2$
Faktor 2 ausklammern	$f(x)$	$=$	$2 \cdot (x^3 - 3x^2)$
Gleichung 3. Grades (Faktor 2 merken!)	0	$=$	$x^3 - 3x^2$
x^2 ausklammern	0	$=$	$x^2 \cdot (x - 3)$
Faktoren zu Null setzen	$x^2 = 0$	$\vee$	$(x - 3) = 0$
Lösungen	$x_{1/2} = \pm 0$	$\vee$	$x_3 = 3$

$\rightarrow$ f hat die doppelte Nullstelle: $x_{1/2} = 0$ und
die einfache Nullstelle $x_3 = 3$

$\rightarrow$ Linearfaktorzerlegung $f(x) = 2 \cdot (x - 0)^2 \cdot (x - 3)$

Anmerkung: Bei der einfachen Nullstelle schneidet der Graph die x-Achse,
bei der doppelten Nullstelle berührt er sie nur.

(f) Gleichung 3. Grades ohne konstantes Glied

Polynomfunktion 3. Grades	$f(x)$	$=$	$x^3 - x^2 + 7x$
Gleichung 3. Grades	0	$=$	$x^3 - x^2 + 7x$
x ausklammern	0	$=$	$x \cdot (x^2 - x + 7)$
Faktoren zu Null setzen	$x = 0$	$\vee$	$x^2 - x + 7 = 0$

$\rightarrow$ Die quadratische Gleichung hat keine reelle Lösung. Deshalb hat f nur die einfache Nullstelle: $x_1 = 0$

$\rightarrow$ Linearfaktorzerlegung $f(x) = (x - 0) \cdot (x^2 - x + 7)$

(g) Biquadratische Gleichung

Polynomfunktion 4. Grades	$f(x)$	$=$	$x^4 - 10x^2 + 9$
Gleichung 4. Grades	0	$=$	$x^4 - 10x^2 + 9$
Substitution	z	$=$	x^2
Quadratische Gleichung für z	0	$=$	$z^2 - 10z + 9$
Lösungsformel	$z_{1/2}$	$=$	$\frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$
Lösungen für z	$z_1 = 9$	$\wedge$	$z_2 = 1$
Rücksubstitution	$x^2 = 9$	$\wedge$	$x^2 = 1$
Lösungen für x	$x_{1/2} = \pm 3$	$\wedge$	$x_{3/4} = \pm 1$

$\rightarrow$ f hat vier einfache Nullstellen:
$x_1 = +3 \qquad x_2 = -3 \qquad x_3 = +1 \qquad x_4 = -1$

$\rightarrow$ Linearfaktorzerlegung $f(x) = (x - 3) \cdot (x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$

(h) Gleichung aus Linearfaktoren

Polynomfunktion 5. Grades	$f(x)$	$=$	$4 \cdot (x + 6)^3 \cdot (x - 2)^2$
Faktorisieren der Gleichung 5. Grades	0	$=$	$(x + 6)^3 \cdot (x - 2)^2$
Faktoren zu Null setzen	$(x + 6)^3 = 0$	$\vee$	$(x - 2)^2 = 0$
Lösungen	$x_{1/2/3} = -6$	$\vee$	$x_{4/5} = 2$

$\rightarrow$ f hat die dreifache Nullstelle $x_{1/2/3} = -6$ und die doppelte Nullstelle $x_{4/5} = 2$

Anmerkung: Bei der zweifachen Nullstelle berührt der Graph die x-Achse lediglich, bei der dreifachen Nullstelle berührt und durchsetzt er sie.

4.4.2 Aufsuchen von Nullstellen durch Polynomdivision

Gegeben sei eine Polynomfunktion $f(x)$ vom Grad 3 mit einem konstanten Glied $a_0 \neq 0$. Nun greift keine der vorher gezeigten Methoden zum finden einer Nullstelle. Sind jedoch einige Voraussetzungen gegeben, so kann man sich behelfen:

- Es kann davon ausgegangen werden, dass die Funktion mindestens eine ganzzahlige Nullstelle hat.
- Der Koeffizient a_3 habe den Wert 1.
- Alle anderen Koeffizienten seien ganzzahlig.

Nun kann der verallgemeinerte Satz von Vieta angewandt werden. Dieser besagt, dass die gesuchte Nullstelle ein ganzzahliger Teiler des x-freien Gliedes a_0 ist. Man muss also alle in Frage kommenden positiven und negativen Werte in den Funktionsterm einsetzen, bis dieser den Wert Null hat. Die erste Nullstelle x_1 ist gefunden.

Um die weiteren Nullstellen zu ermitteln wird eine Polynomdivision $\frac{f(x)}{(x-x_1)}$ durchgeführt. Man erhält ein Polynom vom Grad 2. Dessen Nullstellen sind nun sehr einfach mit Hilfe der Lösungsformel (siehe Seite 43) zu ermitteln.

Beispiel:
Gesucht sind die Nullstellen der Polynomfunktion

$$f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4x + 12$$

Koeffizient $a_3 = 1$:	$f(x) = -[x^3 + 3x^2 - 4x - 12]$
Nullstelle raten:	$f(1) = 12 \quad f(-1) = 6 \quad f(2) = 0$ $\rightarrow x_1 = 2$
Erster Linearfaktor:	$(x-2)$
Polynomdivision:	$(-x^3 - 3x^2 + 4x + 12) : (x-2) = -x^2 - 5x - 6$
Um die Nullstellen zu bestimmen muss gelten:	$(x-2) = 0 \vee -x^2 - 5x - 6 = 0$
Lösungsformel anwenden:	$x_{2/3} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{5 \pm 1}{-2}$
weitere Nullstellen:	$x_2 = -3 \qquad x_3 = -2$
f hat die einfachen Nullstellen:	$x_1 = 2 \qquad x_2 = -3 \qquad x_3 = -2$
Linearfaktorzerlegung:	$f(x) = (x-2) \cdot (x+3) \cdot (x+2)$

Ist eine gegebene Polynomfunktion dagegen vom 4. Grad, so kann die erste Nullstelle nur noch geraten werden (ohne den erweiterten Satz von Vieta). Durch anschließende Polynomdivision erhält man ein Polynom vom Grad 3. Nun ist das Vorgehen wie oben beschrieben.

Beispiel:
Gesucht sind die Nullstellen der Polynomfunktion

$$f(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 6$$

Nullstelle raten:	$f(1) = 0$ $\rightarrow x_1 = 1$
Erster Linearfaktor:	$(x - 1)$
Polynomdivision:	$(x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 6) : (x - 1) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$
Nullstelle raten:	$f(-2) = 0$ $\rightarrow x_2 = -2$
Zweiter Linearfaktor:	$(x + 2)$
Polynomdivision:	$(x^3 + 2x^2 - 3x - 6) : (x + 2) = x^2 - 3$
Nullstellen der quadr. Gleichung $x^3 - 3 = 0$:	$x_3 = \sqrt{3} \qquad x_4 = -\sqrt{3}$
f hat die einfachen Nullstellen:	$x_1 = 1 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = \sqrt{3} \qquad x_4 = -\sqrt{3}$
Linearfaktorzerlegung:	$f(x) = (x + 2) \cdot (x - 1) \cdot (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3})$

Aufgaben

Zerlegen Sie die folgenden Funktionen in ihre Linearfaktoren.

a)	$f(x) = x^3 - 4x$	*b)*	$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
c)	$f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$	*d)*	$f(x) = x^4 - x^2$
e)	$f(x) = 2x^3 - 20x^2 + 32x$	*f)*	$f(x) = \frac{4}{3}x^4 - \frac{1}{8}x^3$
g)	$f(x) = 3x^5 - 12x^3 + 12x$	*h)*	$f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{5}x$
i)	$f(x) = \frac{1}{16}x^4 - 1$	*j)*	$f(x) = \frac{3}{4}x^5 + 6x^4 - 9x^3$
k)	$f_k(x) = 2kx^4 - k^2x^2, \qquad k > 0$	*l)*	$f_k(x) = x^4 - 3kx^2 + 2k^2, \qquad k > 0$
m)	$f_k(x) = (k^2 - 4)x^3, \qquad k \in \mathbf{R}\backslash\{-2, 2\}$	*n)*	$f_k(x) = x^3 - \frac{k^2+1}{k} \cdot x^2 + x, \qquad k > 0$
o)	$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$	*p)*	$f(x) = -6x^3 + 23x^2 + 6x - 8$
q)	$f(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - 9x - 9$	*r)*	$f(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$

Lösungen

a) $f(x) = x \cdot (x-2) \cdot (x+2)$

b) $f(x) = (x+2) \cdot (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x-1)$

c) $f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-2)^2$

d) $f(x) = (x+1) \cdot (x-1) \cdot x^2$

e) $f(x) = 2 \cdot x \cdot (x-2) \cdot (x-8)$

f) $f(x) = \frac{4}{3} \cdot x^3 \cdot \left(x - \frac{3}{32}\right)$

g) $f(x) = 3 \cdot x \cdot (x+\sqrt{2})^2 \cdot (x-\sqrt{2})^2$

h) $f(x) = x \cdot \left(x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{5}\right)$

i) $f(x) = \frac{1}{16} \cdot (x+2) \cdot (x-2) \cdot (x^2+4)$

j) $f(x) = \frac{3}{4} \cdot x^3 \cdot (x - [-4+\sqrt{28}]) \cdot (x - [-4-\sqrt{28}])$

k) $f_k(x) = 2k \cdot x^2 \cdot \left(x - \sqrt{\frac{k}{2}}\right) \cdot \left(x + \sqrt{\frac{k}{2}}\right)$

l) $f_k(x) = (x+\sqrt{2k}) \cdot (x-\sqrt{2k}) \cdot (x+\sqrt{k}) \cdot (x-\sqrt{k})$

m) $f_k(x) = (k^2-4)x^3$

n) $f_k(x) = x \cdot (x-k) \cdot \left(x - \frac{1}{k}\right)$

o) $f(x) = (x-1) \cdot (x^2 - x + 1)$

p) $f(x) = -6 \cdot (x-4) \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$

q) $f(x) = (x-3) \cdot (x+3) \cdot (x^2 + x + 1)$

r) $f(x) = (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-3) \cdot (x+4)$

Anmerkungen:

Zu h) Es gibt nur die eine, einfache Nullstelle $x = 0$. Deshalb ist $f(x)$ nicht weiter zerlegbar.

Zu i) Es gibt die zwei doppelten Nullstellen $x = 2$ und $x = -2$. Soll die Funktion jedoch mit Linearfaktoren dargestellt werden, so kann der letzte Linearfaktor nicht weiter zerlegt werden! Grund: im Rechenweg $x^2 = -4$.

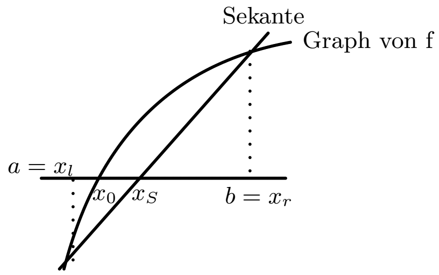
Zu m) Es gibt nur die eine, dreifache Nullstelle $x = 0$. Deshalb ist $f(x)$ nicht weiter zerlegbar.

Zu o) Es gibt nur die eine, einfache Nullstelle $x = 1$. Deshalb ist $f(x)$ nicht weiter zerlegbar.

4.4.3 Näherungsverfahren „Regula Falsi“ für Nullstellen

Ist bei einer Polynomfunktion vom Grad 3 oder höher keine Nullstelle ganzzahlig, bzw. sind die Nullstellen durch Probieren nicht zu finden, so muss ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der Nullstellen herangezogen werden.

Das hier vorgestellt Verfahren „Regula Falsi“ nimmt lineare Funktionen, deren Graphen Sekanten zum Graphen der Polynomfunktion sind, zu Hilfe.



x_l = linke Intervallgrenze
x_r = rechte Intervallgrenze
x_S = Nullstelle der Sekante
x_0 = gesuchte Nullstelle der Funktion f

Das „Regula falsi“ Verfahren ist ein Rekursionsverfahren, mit dem das Intervall um die gesuchte Nullstelle immer kleiner wird:

Erste Schätzung des Intervalls in dem sich die Nullstelle befindet:	$x_l = a \quad x_r = b$
Gleichung der Sekante aufstellen (siehe S. 27):	$y = f(x_l) + \frac{f(x_r)-f(x_l)}{x_r-x_l} \cdot (x - x_l)$
Nullstelle der Sekante berechnen:	$0 = f(x_l) + \frac{f(x_r)-f(x_l)}{x_r-x_l} \cdot (x_S - x_l)$
Nach x_S auflösen. x_S ist ein Näherungswert zu x_0	$x_S = x_l - f(x_l) \cdot \frac{x_r-x_l}{f(x_r)-f(x_l)}$
Neue Intervallgrenzen bestimmen:	$x_r = x_S$, falls $f(x_l) \cdot f(x_S) < 0$ $x_l = x_S$, falls $f(x_r) \cdot f(x_S) < 0$

Beispiel:
Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{5}{2}x + 3$ im Intervall $[-5; 0]$.

x_l	$f(x_l)$	x_r	$f(x_r)$	x_S	$f(x_S)$
$-5,0000$	$-0,1250$	$0,0000$	$3,0000$	$-4,8000$	$1,1760$
$-5,0000$	$-0,1250$	$-4,8000$	$1,1760$	$-4,9808$	$0,0064$
$-5,0000$	$-0,1250$	$-4,9808$	$0,0064$	$-4,9817$	$0,0000$
$-5,0000$	$-0,1250$	$-4,9817$	$0,0000$	$-4,9817$	$0,0000$

4.4.4 Felderabstreichen

Sind die Nullstellen einer Polynomfunktion bekannt, so lässt sich der Verlauf des zugehörigen Graphen bereits abschätzen. Schließlich bekommt man die Vorzeichenverteilung links bzw. rechts der Nullstellen recht schnell heraus. Am einfachsten geht es, wenn man eine Vorzeichentabelle verwendet.

Ist diese ausgefüllt, wird das Koordinatensystem in solche Bereiche aufgeteilt, in denen sich der Graph befindet, oder eben nicht befindet. Letztere werden durch schraffieren entwertet (=Felderabstreichen).

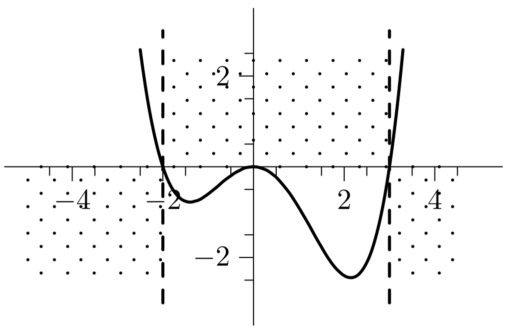
Beispiel:
Geben Sie den groben Verlauf des Graphen der Funktion
$f(x) = x^2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 3)$ an.

→ Da die Funktion bereits in Linearfaktoren zerlegt ist, können die Nullstellen einfach abgelesen werden:

doppelte Nullstelle:	$x_{1/2} = 0$
einfache Nullstelle:	$x_3 = -2$
einfache Nullstelle:	$x_4 = 3$

Vorzeichentabelle aufstellen:

x	$-\infty$	-2	$\ldots$	0	$\ldots$	3	$+\infty$
$sgn(x^2)$	$+1$	$*$	$+1$	0	$+1$	$*$	$+1$
$sgn(x+2)$	-1	0	$+1$	$*$	$+1$	$*$	$+1$
$sgn(x-3)$	-1	$*$	-1	$*$	-1	0	$+1$
$sgn(f(x))$	$+1$	0	-1	0	-1	0	$+1$



4.5 Aufstellen von Polynomfunktionen

Ist die Polynomfunktion des Graphen gesucht, der mehrere gegebene Punkte enthält, so muss man sich zuerst darüber im Klaren sein, welchen Grad die gesuchte Funktion maximal haben kann.

Da eine Funktion nur über das Aufstellen eines Gleichungssystems gefunden wird, ist die maximale Anzahl an Gleichungen bestimmend für die maximale Anzahl der berechenbaren Unbekannten. Bei der vorliegenden Aufgabenstellung sind die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, ... die Unbekannten. Man erkennt, dass mit n gegebenen Punkten stets n Gleichungen aufgestellt, und damit Funktionen vom Grad n-1 berechnet werden können.

Beispiel:
Gegeben seien die Punkte $A(-1|0)$, $B(0|-1)$, $C(1|2)$ und $D(2|9)$. Gesucht ist eine Polynomfunktion, deren Graph diese Punkte enthält.

→ Da 4 Punkte gegeben sind kann die gesuchte Funktion maximal vom Grad 3 sein. Deshalb lautet sie in der allgemeinen Form:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = y$$

Gleichungen aufstellen:

$$\begin{array}{llllll}
\text{Punkt A:} & a_3 \cdot (-1)^3 & +a_2 \cdot (-1)^2 & +a_1 \cdot (-1) & +a_0 & = 0 \\
\text{Punkt B:} & a_3 \cdot 0^3 & +a_2 \cdot 0^2 & +a_1 \cdot 0 & +a_0 & = -1 \\
\text{Punkt C:} & a_3 \cdot 1^3 & +a_2 \cdot 1^2 & +a_1 \cdot 1 & +a_0 & = 2 \\
\text{Punkt D:} & a_3 \cdot 2^3 & +a_2 \cdot 2^2 & +a_1 \cdot 2 & +a_0 & = 9
\end{array}$$

Lösen des Gleichungssystems mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren:

$$\begin{array}{cccc|c}
-1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
8 & 4 & 2 & 1 & 9
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\
0 & -4 & -6 & -7 & -7 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -6 & -3 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\text{Aus 4. Zeile:} & & \rightarrow & a_0 = -1 \\
\text{Aus 3. Zeile:} & -6a_1 - 3a_0 = -3 & \rightarrow & a_1 = 1 \\
\text{Aus 2. Zeile:} & a_2 + a_0 = 1 & \rightarrow & a_2 = 2 \\
\text{Aus 1. Zeile:} & a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 2 & \rightarrow & a_3 = 0
\end{array}$$

Die gesuchte Polynomfunktion war also nur vom Grad 2:

$$\underline{\underline{f(x) = 2x^2 + x - 2}}$$

Übungsaufgabe

Gegeben seien die Punkte $A(1|0)$, $B(0|2)$, $C(2|4)$ und $D(-1|4)$.

1. Ermitteln Sie die Funktion $f(x)$, deren Graph die gegebenen Punkte beinhaltet.
2. Geben Sie die Nullstellen der Funktion $f(x)$ an.
3. Zerlegen Sie den Funktionsterm in Linearfaktoren.
4. Fertigen Sie mit Hilfe des Verfahrens „Felderabstreichen“ eine grobe Skizze des Graphen der Funktion $f(x)$ an.

Lösung:

1. Da vier Punkte gegeben sind, kann es sich höchstens um eine Polynomfunktion 3. Grades mit den vier Unbekannten a_3, a_2, a_1 und a_0 handeln.

$$\begin{array}{llllll}
\text{Punkt A:} & a_3\cdot 1^3 & +a_2\cdot 1^2 & +a_1\cdot 1 & +a_0 & =0\\
\text{Punkt B:} & a_3\cdot 0^3 & +a_2\cdot 0^2 & +a_1\cdot 0 & +a_0 & =2\\
\text{Punkt C:} & a_3\cdot 2^3 & +a_2\cdot 2^2 & +a_1\cdot 2 & +a_0 & =4\\
\text{Punkt D:} & a_3\cdot (-1)^3 & +a_2\cdot (-1)^2 & +a_1\cdot (-1) & +a_0 & =4
\end{array}$$

Lösen des Gleichungssystems mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren:

$$\left.\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 2\\
8 & 4 & 2 & 1 & 4\\
-1 & 1 & -1 & 1 & 4
\end{array}\right.
\rightarrow
\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
-1 & 1 & -1 & 1 & 4\\
8 & 4 & 2 & 1 & 4\\
0 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 2 & 0 & 2 & 4\\
0 & -4 & -6 & -7 & 4\\
0 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{array}
\rightarrow$$

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 2 & 0 & 2 & 4\\
0 & 0 & -6 & -3 & 12\\
0 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{llll}
\text{Aus 1. Zeile:} & a_3+a_2+a_1+a_0=0 & \rightarrow & a_3=1\\
\text{Aus 2. Zeile:} & 2a_2+2a_0=4 & \rightarrow & a_2=0\\
\text{Aus 3. Zeile:} & -6a_1-3a_0=12 & \rightarrow & a_1=-3\\
\text{Aus 4. Zeile:} & & \rightarrow & a_0=2
\end{array}$$

Die gesuchte Polynomfunktion lautet:

$$\underline{\underline{f(x)=x^3-3x+2}}$$

2. Die Nullstellen einer Funktion haben die Eigenschaft, dass der zugehörige y-Wert gleich Null ist.
   $\rightarrow$ Der gegebene Punkt $A(1|0)$ ist die erste Nullstelle.

   Mit Hilfe einer Polynomdivision kann der Grad der Funktion $f(x)$ zunächst reduziert werden:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 3x + 2) : (x - 1) = x^2 + x - 2 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\qquad x^2 - 3x + 2 \\
\quad \underline{-(x^2 - x)} \\
\qquad\quad -2x + 2 \\
\qquad \underline{-(-2x + 2)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$\rightarrow \quad f(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + x - 2)$$

   Soll der Funktionswert von $f(x)$ Null sein, so muss entweder der erste Faktor Null sein (dies ist die bereits bekannte erste Nullstelle), oder der zweite Faktor muss Null sein. Wann dieser den Wert Null annimmt wird mit Hilfe der Lösungsformel bestimmt:

$$
\begin{aligned}
x_{2/3} &= \tfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \\
x_{2/3} &= \tfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2}
\end{aligned}
$$

   Die Nullstellen von $f(x)$ lauten somit:

$$
\left.\begin{array}{r}
\underline{\underline{x_1 = 1}} \\
\underline{\underline{x_2 = 1}}
\end{array}\right\} \text{doppelte Nullstelle}
$$

$$\underline{\underline{x_3 = -2}} \qquad \text{einfache Nullstelle}$$

3. Da die Nullstellen aus der vorhergehenden Teilaufgabe bereits bekannt sind, ist die Zerlegung des Funktionsterms in Linearfaktoren kein Problem mehr:

$$f(x) = (x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$$

$$\underline{\underline{f(x) = (x - 1)^2 \cdot (x + 2)}}$$

4. Aufstellen einer Vorzeichentabelle:

	$-\infty$	-2	$\dots$	1	$+\infty$
$sgn[(x-1)^2]$	$+1$	$*$	$+1$	0	$+1$
$sgn(x+2)$	-1	0	$+1$	$*$	$+1$
$sgn(f(x))$	-1	0	$+1$	0	$+1$

Übertragen der Ergebnisse der Vorzeichentabelle in ein Koordinatensystem: