5 Gebrochen rationale Funktionen

Unter einer gebrochen rationalen Funktion versteht man den Quotienten zweier ganzrationaler Funktionen. Dabei setzt sich der Funktionsterm aus dem Zählerpolynom vom Grad n und dem Nennerpolynom vom Grad m zusammen.
Die Nullstellen der Polynomfunktion im Nenner werden mit x_1, x_2, …, x_k bezeichnet, wobei $k \leq m$ gelten muss.
Damit hat eine gebrochen rationale Funktion folgende Form:

$$f : x \mapsto \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}, \quad x \in \mathbf{R} \backslash \{x_1, x_2, \ldots x_k\}, \quad a_n \neq 0, \quad b_m \neq 0$$

Ist $n < m$, dann heißt die Funktion *echt gebrochen rational*, ist dagegen $n \geq m$, dann heißt die Funktion *unecht gebrochen rational*.

Beispiele:

- Echt gebrochen rationale Funktion:

$$f : x \mapsto \frac{2x^2 + x + 1}{x(x-2)(x-1)}, \qquad x \in \mathbf{R} \backslash \{0, 1, 2\}$$

- Unecht gebrochen rationale Funktion:

$$f : x \mapsto \frac{4x^2 - 3x + 1}{x + 1}, \qquad x \in \mathbf{R} \backslash \{-1\}$$

Durch Polynomdivision lässt sich diese Funktion in einen ganzrationalen und einen echt gebrochen rationalen Teil umwandeln:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 3x + 1}{x + 1} = 4x - 7 + \frac{8}{x - 1}$$

Bei gebrochen rationalen Funktionen haben die Nullstellen des Zählerpolynoms ganz andere Auswirkungen als die Nullstellen des Nennerpolynoms.
Für eine Nullstelle des Zählers ist der gesamte Funktionsterm gleich Null, also ist dieser x_N-Wert eine klassische Nullstelle der Funktion. Besitzt jedoch das Nennerpolynom eine Nullstelle, so bedeutet dies für die gebrochen rationale Funktion, dass durch Null dividiert wird! Dies führt dazu, dass die Funktion an allen Nullstellen des Nennerpolynoms nicht definiert ist.

Es sei $f : \mathbf{D}_f \mapsto \mathbf{R}$ eine beliebige gebrochen rationale Funktion. Ist x_N eine Nullstelle des Zählerpolynoms, so heißt sie *Nullstelle der gebrochen rationalen Funktion*, falls sie zum Definitionsbereich gehört.
Falls x_N jedoch eine Nullstelle des Nennerpolynoms ist, so heißt sie *Definitionslücke* und muss aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden.

5.1 Definitionslücken

Ist der Wert x_N die Nullstelle des Nennerpolynoms einer gebrochen rationalen Funktion, so ist die gesamte Funktion an dieser Stelle nicht definiert (Stichwort: Division durch Null!). Der Wert x_N muss deshalb aus der Definitionsmenge der Funktion ausgeschlossen werden und heißt Definitionslücke.

5.1.1 Polstellen

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x) = \frac{4x+2}{x^3-3x^2+2x-6} = \frac{4x+2}{(x-3)\cdot(x^2+2)}$$

Man erkennt, dass diese Funktion eine Nullstelle bei $x_N = -0,5$ und eine Definitionslücke bei $x_P = 3$ besitzt.

Wie verhält sich die Funktion nun in der Nähe dieser Definitionslücke? Um dies zu untersuchen berechnet man einige Funktionswerte (Näherungswerte) in der Nähe der Definitionslücke.

linksseitige Annäherung		rechtsseitige Annäherung	
$f(2)$	$\approx -1,6667$	$f(4)$	$\approx 1,0000$
$f(2,5)$	$\approx -2,9091$	$f(3,5)$	$\approx 2,2456$
$f(2,9)$	$\approx -13,0644$	$f(3,1)$	$\approx 12,4031$
$f(2,99)$	$\approx -127,6040$	$f(3,01)$	$\approx 126,9428$
$f(2,999)$	$\approx -1273,0579$	$f(3,001)$	$\approx 1272,3968$

Man erkennt, dass die Beträge der Funktionswerte immer weiter anwachsen, je weiter man sich mit den x-Werten der Definitionslücke annähert. Vermutlich wird sich dieses Verhalten unbeschränkt fortsetzen.
Bei der linksseitigen Annäherung nehmen die Funktionswerte unbeschränkt ab, während sie bei der rechtsseitigen Annäherung unbeschränkt zunehmen.
Diese Art der Definitionslücke wird *Pol mit Vorzeichenwechsel* genannt.

Hinweis:
Natürlich lässt sich der eben beschriebene Sachverhalt auch mathematisch beweisen. Dazu wird eine Variable h eingeführt, die eine sehr kleine positive Zahl sei. Ein x-Wert der sich ganz knapp neben der Definitionslücke $x_P = 3$ in obigem Beispiel befindet wäre damit $x = 3 + h$. Damit gilt:

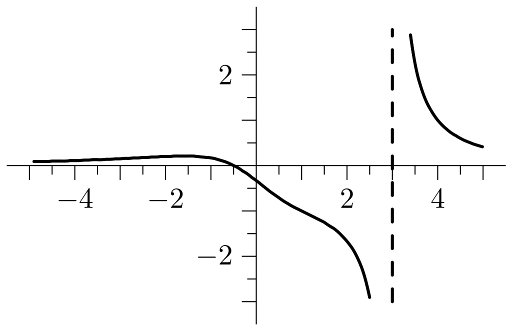
$$\begin{aligned} f(3+h) &= \frac{4(3+h)+2}{(3+h)^3-3(3+h)^2+2(3+h)-6} \\ f(3+h) &= \frac{4(3+h)+2}{((3+h)-3)\cdot((3+h)^2+2)} \\ f(3+h) &= \frac{14+4h}{h\cdot[(3+h)^2+2]} \end{aligned}$$

Lässt man h nun immer kleiner werden - also gegen Null gehen -, dann wachsen die Funktionswerte über alle Grenzen. Man sagt: „Die Funktionswerte gehen gegen unendlich.“. Dies wird symbolisch folgendermaßen dargestellt:

$$f(3+h) \to \infty \qquad \text{für} \qquad h \to 0$$

Auf ganz analoge Weise findet man den Zusammenhang:

$$f(3-h) \to -\infty \qquad \text{für} \qquad h \to 0$$



Der Graph der Funktion nähert sich der senkrechten Geraden bei $x = 3$ von beiden Seiten immer näher an, wird sie jedoch nie ganz erreichen. Eine solche Gerade heißt *Polasymptote* oder auch *vertikale Asymptote*.

Daneben gibt es auch noch einen *Pol ohne Vorzeichenwechsel*. Bei diesem ist es egal ob man sich von links oder rechts annähert. Die Funktionswerte auf beiden Seiten des Poles haben stets das gleiche Vorzeichen und wachsen über alle Grenzen.

Erweitert man den Funktionsterm mit einem Linearfaktor einer Polstelle - in diesem Beispiel mit $(x-3)$ - oder mit Potenzen dieses Linearfaktors, so ändert sich am Verhalten der Funktion in der Nähe der Polstelle gar nichts:

$$f(x) = \frac{(4x+2)}{(x-3)\cdot(x^2+2)} \qquad x \in \mathbf{R}\setminus\{3\}$$
$$f_1(x) = \frac{(4x+2)(x-3)}{(x-3)^2\cdot(x^2+2)} \qquad x \in \mathbf{R}\setminus\{3\}$$
$$f_2(x) = \frac{(4x+2)(x-3)^2}{(x-3)^3\cdot(x^2+2)} \qquad x \in \mathbf{R}\setminus\{3\}$$

Zusammenfassung:

Es sei f eine beliebige gebrochen rationale Funktion. Die Stelle $x_P \notin \mathbf{D}_f$ heißt *Polstelle* von f genau dann, wenn bei beliebiger Annäherung von x an $x_P \notin \mathbf{D}_f$ die Beträge $|f(x)|$ der Funktionswerte alle Grenzen übersteigen.
Die *Polasymptote (vertikale Asymptote)* ist die Gerade mit der Gleichung $x = x_P$, an die sich der Graph der Funktion immer mehr anschmiegt, je mehr man sich der Definitionslücke nähert.

Beispiel:
Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x-5}{3\cdot(x+1)^2}$. Geben Sie die maximale Definitionsmenge, die Nullstelle(n) und die Polstelle(n) dieser Funktion an.

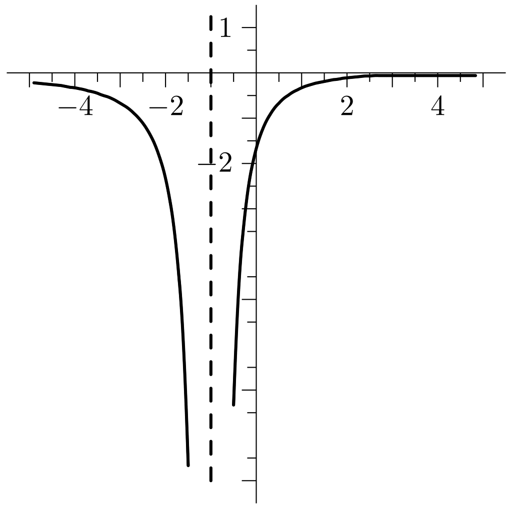
$\rightarrow$ Man erkennt, dass der Nenner für $x = -1$ zu Null wird. Deshalb lautet die maximale Definitionsmenge: $\underline{\underline{\mathbf{D} = \mathbf{R}\backslash\{-1\}}}$

$\rightarrow$ An der Stelle, wo der Nenner zu Null wird, ist auch die Polstelle dieser Funktion: $\underline{\underline{x_P = -1}}$

$\rightarrow$ Eine Nullstelle ist dann gegeben, wenn der Zähler der Funktion den Wert Null annimmt: $\underline{\underline{x_N = 5}}$

Auch hier kann das Verhalten nahe des Pols durch eine Vorzeichentabelle untersucht werden. Mathematischer gelingt dies, indem erneut die sehr kleine, positive Zahl h zu Hilfe genommen wird:

linksseitige Annäherung	rechtsseitige Annäherung
$f(-1-h) = \frac{(-1-h)-5}{3\cdot[(-1-h)+1]^2}$	$f(-1+h) = \frac{(-1+h)-5}{3\cdot[(-1+h)+1]^2}$
$f(-1-h) = \frac{-6-h}{3\cdot[-h]^2}$	$f(-1+h) = \frac{-6+h}{3\cdot[h]^2}$
$f(-1-h) = \frac{-6-h}{3h^2}$	$f(-1+h) = \frac{-6+h}{3h^2}$
$f(-1-h) \rightarrow -\infty \quad$ für $\quad h \rightarrow 0$	$f(-1+h) \rightarrow -\infty \quad$ für $\quad h \rightarrow 0$



5.1.2 Behebbare Definitionslücken

Wie verhält sich eine Funktion $f(x)$ falls der Wert x_0 nun eine Nullstelle des Zählerpolynoms und des Nennerpolynoms ist: $x_0 = x_N = x_P$?

Beispiel:
Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{4(x-1)^2+2(x-1)}{(x-1)\cdot x}$. Wie verhält sich die Funktion

in der Nähe von $x_0 = 1$?

linksseitige Annäherung		rechtsseitige Annäherung	
$f(0,5)$	$\approx 0,000$	$f(1,5)$	$\approx 3,000$
$f(0,9)$	$\approx 1,778$	$f(1,1)$	$\approx 2,182$
$f(0,99)$	$\approx 1,980$	$f(1,01)$	$\approx 2,020$
$f(0,999)$	$\approx 1,998$	$f(1,001)$	$\approx 2,002$
$f(0,9999)$	$\approx 2,000$	$f(1,0001)$	$\approx 2,000$

Das bedeutet, dass sich die y-Werte sowohl von der linken Seite der Definitionslücke, als auch von deren rechten Seite her genau dem Funktionswert $f(x_0 = 1) = 2$ annähern. Die Funktion ist also in der unmittelbaren Umgebung von $x_0 = 1$ beschränkt.

Im Definitionsbereich $\mathbf{D}_f = \mathbf{R}\backslash\{0,1\}$ stellt das Kürzen des Funktionsterms durch $x \neq 0$ eine Äquivalenzumformung dar. Damit gilt auch:

$$f(x) = \frac{4(x-1)+2}{x} \qquad x \in \mathbf{R}\backslash\{0,1\}$$

In diese neue Funktion könnte man auch $x = 1$ einsetzten, wenn dies durch die Definitionsmenge nicht ausdrücklich untersagt wäre! Man erhielte in diesem Fall den Funktionswert $f(x = 1) = 2$ und könnte so die Lücke schließen.
Auf diese Weise gelangt man zur *stetigen Fortsetzung* von f mit

$$f^* = \begin{cases} \frac{4(x-1)+2}{x}, & x \neq \{0,1\} \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

Mathematisch präziser lässt sich das Verhalten in der Nähe von $x_0 = 1$ mit Hilfe einer sehr kleinen, positiven Zahl h beschreiben. Ein x-Wert, der sich ganz knapp links von 1 befindet kann somit als $x = 1 - h$ ausgedrückt werden. Damit gilt:

$$\begin{aligned} f(1-h) &= \frac{4([1-h]-1)^2 + 2([1-h]-1)}{([1-h]-1)\cdot[1-h]} \\ f(1-h) &= \frac{4(-h)^2 + 2(-h)}{(-h)\cdot[1-h]} \\ f(1-h) &= \frac{4h^2 - 2h}{h^2 - h} \\ f(1-h) &= \frac{h\cdot(4h-2)}{h\cdot(h-1)} \\ f(1-h) &= \frac{4h-2}{h-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\text{für } h \to 0 \quad \text{gilt} \quad f(1-h) \to 2}}$$

Dies bedeutet: Lässt man die h gegen Null gehen, so streben die Funktionswerte gegen 2.

Der Einfachheit halber, und da es sich um eine Äquivalenzumformung handelt, kann bei diesem Verfahren bereits mit dem gekürzten Term begonnen werden. Somit lautet die Annäherung von der rechten Seite:

$$\begin{aligned} f(1+h) &= \frac{4([1+h]-1)+2}{[1+h]} \\ f(1+h) &= \frac{4h+2}{1+h} \\ f(1+h) &= \frac{2\cdot(2h+1)}{1+h} \\ \Rightarrow &\quad \underline{\underline{\text{für } h \to 0 \quad \text{gilt} \quad f(1+h) \to 2}} \end{aligned}$$

Es ist also egal ob man sich von links, oder von rechts der Definitionslücke nähert, die Funktionswerte rücken immer näher an 2 heran.

> Es sei $f : \mathbf{D}_f \to \mathbf{R}$ eine beliebige gebrochen rationale Funktion. Die Stelle $x_0 \in \mathbf{D}_f$ heißt stetig behebbare Definitionslücke von f genau dann, wenn bei beliebiger Annäherung von x an $x_0 \notin \mathbf{D}_f$ die Funktionswerte $f(x)$ gegen eine bestimmte reelle Zahl a streben.

Tipp für die Praxis:
Eine stetig behebbare Definitionslücke erkennt man daran, dass sie eine Nullstelle des Zählerpolynoms und auch eine Nullstelle des Nennerpolynoms ist, wobei die Vielfachheit der Zählerpolynomnullstelle größer oder zumindest gleich der Vielfachheit der Nennerpolynomnullstelle ist.

5.1.3 Verhalten von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$

Neben dem Verhalten an den Polstellen ist auch der Verlauf des Graphen einer Funktion für sehr große bzw. sehr kleine x-Werte interessant. Deshalb wird das Verhalten $f(x)$ für x gegen $\pm\infty$ untersucht.

Vorgehensweise:

- Zunächst werden die höchsten Exponenten des Zählers und des Nenners miteinander verglichen. Der höhere von beiden bestimmt dann das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$.
  Beispiele:

  $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5}{x^4-2x+1} = 0$ Graph nähert sich der x-Achse vom positiven her an.

  $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-2x^2}{3x^5+8x^2} = 0$ Graph nähert sich der x-Achse vom negativen her an.

  $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x^2}{x-7} \to +\infty$

- Entspricht der höchste Exponent des Zählers dem höchsten Exponenten des Nenners, so muss sowohl der Zähler als auch der Nenner durch die Variable mit dem höchsten Exponenten dividiert werden. Die daraus entstehenden Brüche im Zähler und im Nenner gehen für $x \to \pm\infty$ gegen Null. Es bleibt ein Bruch stehen, welcher den Grenzwert der Funktion für $x \to \pm\infty$ angibt.
  Beispiele:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x}{2x^3-4x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2x}{x^3}}{2-\frac{4x^2}{x^3}} = 0,5$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^5+2x^3+2x}{2x^5+5x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4+\frac{2x^3}{x^5}+\frac{2x}{x^5}}{2+\frac{5x^4}{x^5}} = -2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2-3}{2x^2+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6-\frac{3}{x^2}}{2+\frac{3}{x^2}} = 3$$

Übungsaufgaben

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich, die Nullstellen und die Pole (jeweils mit Vielfachheiten) der Funktionen an.
Untersuchen Sie ferner das Verhalten der Graphen in der Nähe der Polstellen und für $x \to \pm\infty$.

1. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$
2. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+7x+6}$
3. $f(x) = \frac{x^2-5}{x^3-3x^2+2x+6}$
4. $f(x) = \frac{x^3+7x^2-x-7}{x^3-3x^2+3x-1}$
5. $f(x) = \frac{x^3-4x}{x^2+1}$
6. $f(x) = \frac{2}{x^2-3x+2}$
7. $f(x) = \frac{x^3-x^2+5x-5}{x^3-x^2+x-1}$

Lösungen

1. Für Nullstellen muss gelten: $x^2 + x + 1 = 0$

$$\begin{aligned} &\to \quad x_{N1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \\ &\to \quad \text{Diskriminante } < 0 \quad \to \quad \underline{\underline{\text{keine Nullstellen}}} \end{aligned}$$

Für Pole muss gelten: $x^2 - x + 1 = 0$

$$\begin{aligned} &\to \quad x_{P1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2-4}}{2} \\ &\to \quad \text{Diskriminante } < 0 \quad \to \quad \underline{\underline{\text{keine Polstellen}}} \end{aligned}$$

$\to$ Max. Definitionsbereich: $\underline{\underline{\mathbf{D}_{max} = \mathbf{R}}}$
Verhalten von $f(x)$ für $x \to +\infty$:
Zunächst ist das Verhalten nicht direkt ablesbar, deshalb wird der Zähler und der Nenner durch die Variable mit höchsten Exponenten (hier: x^2) geteilt. Damit erhält man:

$$f^* = \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Nun ist erkennbar, dass die Brüche im Zähler und im Nenner für $x \to \infty$ gegen Null gehen. Somit erhält man:

$$\underline{\underline{\lim_{x\to\infty} f(x) \to 1}}$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \to -\infty$:

$$\underline{\underline{\lim_{x\to-\infty} f(x) \to 1}}$$

2. Für Nullstellen muss gelten: $2x + 1 = 0$

$$\to \quad \underline{\underline{x_{N1} = -\frac{1}{2}}} \quad \text{„einfache“}$$

Für Pole muss gelten: $x^2 + 7x + 6 = 0$

$$\to \quad x_{P1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{-7 \pm 5}{2}$$

$$\to \quad \underline{\underline{x_{P1} = -1}} \quad \text{„einfache“} \qquad \underline{\underline{x_{P2} = -6}} \quad \text{„einfache“}$$

$\to$ Max. Definitionsbereich: $\underline{\underline{\mathbf{D}_{max} = \mathbf{R}\backslash\{-1; -6\}}}$
Verhalten bei $x_{P1} = -1$:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to0} f(-1-h) &= \lim_{h\to0}\left[\frac{2(-1-h)+1}{(-1-h)^2+7(-1-h)+6}\right] = \lim_{h\to0}\left[\frac{-1-2h}{h^2-5h}\right]\\
\lim_{h\to0} f(-1-h) &\to +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to0} f(-1+h) &= \lim_{h\to0}\left[\frac{2(-1+h)+1}{(-1+h)^2+7(-1+h)+6}\right] = \lim_{h\to0}\left[\frac{-1+2h}{h^2+5h}\right]\\
\lim_{h\to0} f(-1+h) &\to -\infty
\end{aligned}$$

Verhalten bei $x_{P2} = -6$:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to0} f(-6-h) &= \lim_{h\to0}\left[\frac{2(-6-h)+1}{(-6-h)^2+7(-6-h)+6}\right] = \lim_{h\to0}\left[\frac{-11-2h}{h^2+5h}\right]\\
\lim_{h\to0} f(-6-h) &\to -\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to0} f(-6+h) &= \lim_{h\to0}\left[\frac{2(-6+h)+1}{(-6+h)^2+7(-6+h)+6}\right] = \lim_{h\to0}\left[\frac{-11+2h}{h^2-5h}\right]\\
\lim_{h\to0} f(-6+h) &\to +\infty
\end{aligned}$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \to +\infty$:
Da der Exponent von x im Nenner höher ist als im Zähler, bestimmt der Nenner das Verhalten.

$$\underline{\underline{\lim_{x\to\infty} f(x) \to 0}}$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \to -\infty$:

$$\underline{\underline{\lim_{x\to-\infty} f(x) \to 0}}$$

3. Für Nullstellen muss gelten: $x^2 - 5 = 0$

$$\rightarrow \quad \underline{\underline{x_{N1} = \sqrt{5}}} \quad \text{„einfache“} \qquad \underline{\underline{x_{N2} = -\sqrt{5}}} \quad \text{„einfache“}$$

Für Pole muss gelten: $x^3 - 3x^2 + 2x + 6 = 0$

$\rightarrow$ Durch Raten: $\underline{\underline{x_{P1} = -1}}$ „einfache“

$\rightarrow$ Polynomdivision: $(x^3 - 3x^2 + 2x + 6) : (x + 1) = x^2 - 4x + 6$
Weitere Polstellen, falls $x^2 - 4x + 6 = 0$

$\rightarrow \quad x_{P2/3} = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 6}}{2}$

$\rightarrow$ Diskriminante < 0 $\rightarrow$ $\underline{\underline{\text{keine weiteren Polstellen}}}$

$\rightarrow$ Max. Definitionsbereich: $\underline{\underline{\mathbf{D}_{max} = \mathbf{R} \backslash \{-1\}}}$
Verhalten bei $x_{P1} = -1$:

$$\lim_{h \to 0} f(-1-h) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{(-1-h)^2 - 5}{(-1-h)^3 - 3(-1-h)^2 + 2(-1-h) + 6} \right] = \lim_{h \to 0} \left[\frac{h^2 + 2h - 4}{-h^3 - 6h^2 - 11h} \right]$$

$$\lim_{h \to 0} f(-1-h) \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{h \to 0} f(-1+h) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{(-1+h)^2 - 5}{(-1+h)^3 - 3(-1+h)^2 + 2(-1+h) + 6} \right] = \lim_{h \to 0} \left[\frac{h^2 - 2h - 4}{h^3 - 6h^2 + 11h} \right]$$

$$\lim_{h \to 0} f(-1+h) \rightarrow -\infty$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow +\infty$:
Da der Exponent von x im Nenner höher ist als im Zähler, bestimmt der Nenner das Verhalten.

$$\underline{\underline{\lim_{x \to \infty} f(x) \rightarrow 0}}$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow -\infty$:

$$\underline{\underline{\lim_{x \to -\infty} f(x) \rightarrow 0}}$$

4. Für Nullstellen muss gelten: $x^3 + 7x^2 - x - 7 = 0$

$\rightarrow$ Durch Raten: $\underline{\underline{x_{N1} = 1}}$ „einfache“

$\rightarrow$ Polynomdivision: $(x^3 + 7x^2 - x - 7) : (x - 1) = x^2 + 8x + 7$
Weitere Nullstellen, falls $x^2 + 8x + 7 = 0$

$\rightarrow \quad x_{N2/3} = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 7}}{2} = \dfrac{-8 \pm 6}{2}$

$\rightarrow \quad \underline{\underline{x_{N2} = -1}}$ „einfache“ $\quad \underline{\underline{x_{N3} = -7}}$ „einfache“

Für Pole muss gelten: $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

→ Durch Raten: $\underline{\underline{x_{P1} = 1}}$

→ Polynomdivision: $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x - 1) = x^2 - 2x + 1$
Weitere Polstellen, falls $x^2 - 2x + 1 = 0$

→ $x_{P2/3} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = 1$

→ $\underline{\underline{x_{P2/3} = x_{P1} = 1}}$ „dreifache“

→ Max. Definitionsbereich: $\underline{\underline{\mathbf{D}_{max} = \mathbf{R}\backslash\{1\}}}$
Verhalten bei $x_{P1} = -1$:

$$\lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{(1-h)^3 + 7(1-h)^2 - (1-h) - 7}{(1-h)^3 - 3(1-h)^2 + 3(1-h) - 1}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{-h^3 + 10h^2 - 16h}{-h^3}\right]$$

Für $h \to 0$ erhält man: $\frac{0}{0}$

Aber: man kann h herauskürzen:

$$\lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{-h^2 + 10h - 16}{-h^2}\right]$$

$$\lim_{h\to 0} f(1-h) \to +\infty$$

$$\lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{(1+h)^3 + 7(1+h)^2 - (1+h) - 7}{(1+h)^3 - 3(1+h)^2 + 3(1+h) - 1}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{h^3 + 10h^2 + 16h}{h^3}\right]$$

Für $h \to 0$ erhält man: $\frac{0}{0}$

Aber: man kann h herauskürzen:

$$\lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{h^2 + 10h + 16}{h^2}\right]$$

$$\lim_{h\to 0} f(1+h) \to +\infty$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \to +\infty$:
Zunächst ist das Verhalten nicht direkt ablesbar, deshalb wird der Zähler und der Nenner durch die Variable mit höchsten Exponenten (hier: x^3) geteilt. Damit erhält man:

$$f^* = \frac{1 + \frac{7}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{7}{x^3}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}}$$

Nun ist erkennbar, dass die Brüche im Zähler und im Nenner für $x \to \infty$ gegen Null gehen. Somit erhält man:

$$\underline{\underline{\lim_{x\to\infty} f(x) \to 1}}$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \to -\infty$:

$$\underline{\underline{\lim_{x\to-\infty} f(x) \to 1}}$$

5. Für Nullstellen muss gelten: $x^3 - 4x = 0$

$$\rightarrow \quad \text{umstellen: } x \cdot (x^2 - 4) = 0$$
$$\rightarrow \quad \underline{\underline{x_{N1} = 0}} \quad \text{„einfache“}$$
$$\underline{\underline{x_{N2} = 2}} \quad \text{„einfache“} \qquad \underline{\underline{x_{N3} = -2}} \quad \text{„einfache“}$$

Für Pole muss gelten: $x^2 + 1 = 0$

$$\rightarrow \quad \text{Gleichung hat keine Lösung} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\text{keine Polstellen}}}$$

$\rightarrow$ Max. Definitionsbereich: $\underline{\underline{\mathbf{D}_{max} = \mathbf{R}}}$ Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow +\infty$: Da der Exponent von x im Zähler höher ist als im Nenner, bestimmt der Zähler das Verhalten.

$$\underline{\underline{\lim_{x\rightarrow\infty} f(x) \rightarrow +\infty}}$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow -\infty$:

$$\underline{\underline{\lim_{x\rightarrow-\infty} f(x) \rightarrow -\infty}}$$

6. Es gibt $\underline{\underline{\text{keine Nullstellen}}}$.
Für Pole muss gelten: $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\rightarrow \quad x_{P1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$
$$\rightarrow \quad \underline{\underline{x_{P1} = 1}} \quad \text{„einfach“} \qquad \underline{\underline{x_{P2} = 2}} \quad \text{„einfach“}$$

$\rightarrow$ Max. Definitionsbereich: $\underline{\underline{\mathbf{D}_{max} = \mathbf{R}\backslash\{1;2\}}}$
Verhalten bei $x_{P1} = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{h\rightarrow0} f(1-h) &= \lim_{h\rightarrow0}\left[\frac{2}{(1-h)^2 - 3(1-h) + 2}\right] = \lim_{h\rightarrow0}\left[\frac{2}{h^2+h}\right] \\ \lim_{h\rightarrow0} f(1-h) &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h\rightarrow0} f(1+h) &= \lim_{h\rightarrow0}\left[\frac{2}{(1+h)^2 - 3(1+h) + 2}\right] = \lim_{h\rightarrow0}\left[\frac{2}{h^2-h}\right] \\ \lim_{h\rightarrow0} f(1+h) &\rightarrow -\infty \end{aligned}$$

Verhalten bei $x_{P2} = 2$:

$$\begin{aligned} \lim_{h\rightarrow0} f(2-h) &= \lim_{h\rightarrow0}\left[\frac{2}{(2-h)^2 - 3(2-h) + 2}\right] = \lim_{h\rightarrow0}\left[\frac{2}{h^2-h}\right] \\ \lim_{h\rightarrow0} f(2-h) &\rightarrow -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h\rightarrow0} f(2+h) &= \lim_{h\rightarrow0}\left[\frac{2}{(2+h)^2 - 3(2+h) + 2}\right] = \lim_{h\rightarrow0}\left[\frac{2}{h^2+h}\right] \\ \lim_{h\rightarrow0} f(2+h) &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \to +\infty$:
Da der Exponent von x im Nenner höher ist als im Zähler, bestimmt der Nenner das Verhalten.

$$\underline{\underline{\lim_{x\to\infty} f(x) \to 0}}$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \to -\infty$:

$$\underline{\underline{\lim_{x\to-\infty} f(x) \to 0}}$$

7. Zerlegung des Zählers in Linearfaktoren:

$\to$ Durch Raten: $x_{N1} = 1$
$\to$ $(x^3 - x^2 + 5x - 5) : (x - 1) = x^2 + 5$
$\to$ Da $x^2 + 5 = 0$ keine Lösungen gibt es keine weiteren Nullstellen

Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren:

$\to$ Durch Raten: $x_{P1} = 1$
$\to$ $(x^3 - x^2 + x - 1) : (x - 1) = x^2 + 1$
$\to$ Da $x^2 + 1 = 0$ keine Lösungen gibt es keine weiteren Polstellen

Mit den Linearfaktoren kann die Funktion umgeschrieben werden:

$$f(x) = \frac{(x-1)\cdot(x^2+5)}{(x-1)\cdot(x^2+1)}$$

Somit lautet der maximale Definitionsbereich:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}_{max} = \mathbf{R}\backslash\{1\}}}$$

Man erkennt, dass der Linearfaktor $(x - 1)$ sowohl im Zähler, als auch im Nenner vorkommt. Damit handelt es sich um eine $\underline{\underline{\text{behebbare Definitionslücke bei } x_L = 1}}$!
Verhalten bei $x_{P1} = 1$:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to0} f(1-h) &= \lim_{h\to0}\left[\frac{(1-h)^3-(1-h)^2+5(1-h)-5}{(1-h)^3-(1-h)^2+(1-h)-1}\right] = \lim_{h\to0}\left[\frac{-h^3+2h^2-6h}{-h^3+2h^2-2h}\right] \\
& \quad \text{Für } h\to0 \text{ erhält man: } \frac{0}{0} \\
& \quad \text{Aber: man kann } h \text{ herauskürzen:} \\
\lim_{h\to0} f(1-h) &= \lim_{h\to0}\left[\frac{-h^2+2h-6}{-h^2+2h-2}\right] \\
\lim_{h\to0} f(1-h) &\to 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to0} f(1+h) &= \lim_{h\to0}\left[\frac{(1-h)^3-(1+h)^2+5(1+h)-5}{(1+h)^3-(1+h)^2+(1+h)-1}\right] = \lim_{h\to0}\left[\frac{h^3+2h^2+6h}{h^3+2h^2+2h}\right] \\
& \quad \text{Für } h\to0 \text{ erhält man: } \frac{0}{0}
\end{aligned}$$

Aber: man kann h herauskürzen:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} f(1-h) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{h^2+2h+6}{h^2+2h+2}\right]\\ \lim_{h\to 0} f(1-h) &\to 3\end{aligned}$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \to +\infty$:
Zunächst ist das Verhalten nicht direkt ablesbar, deshalb wird der Zähler und der Nenner durch die Variable mit höchsten Exponenten (hier: x^3) geteilt. Damit erhält man:

$$f^* = \frac{1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}$$

Nun ist erkennbar, dass die Brüche im Zähler und im Nenner für $x \to \infty$ gegen Null gehen. Somit erhält man:

$$\underline{\underline{\lim_{x\to\infty} f(x) \to 1}}$$

Verhalten von $f(x)$ für $x \to -\infty$:

$$\underline{\underline{\lim_{x\to -\infty} f(x) \to 1}}$$