6 Stetigkeit

Ein Kennzeichen stetiger Funktionen ist es, dass ihre Graphen (evtl. auch nur in Intervallen) nicht „abreißen“ und gezeichnet werden können, ohne den Zeichenstift abzuheben. Bei stetigen Funktionen können aber durchaus „Knicke“ im Funktionsgraphen auftreten.

6.1 Stetigkeit an einer bestimmten Stelle

Eine Funktion $f : x \mapsto f(x)$ mit $x \in \mathbf{D}_f$ heißt an einer Stelle x_0 aus $\mathbf{D}_f$ stetig, wenn der Grenzwert der Funktionswerte an der Stelle x_0 mit dem an der Stelle x_0 erklärten Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmt, also

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0} f(x_0-h) = f(x_0)$$

$$\text{bzw.} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Beispiele:

- Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = x^3 + 2x, \quad \mathbf{D} = \mathbf{R}$ auf Stetigkeit an der Stelle $x_0 = 4$.

  1. Berechnung des Funktionswertes an der Stelle $x_0 = 4$.

  $$\begin{aligned} f(4) &= 4^3 + 2\cdot 4 \\ f(4) &= 72 \end{aligned}$$

  2. Berechnung des rechtsseitigen Grenzwertes zum Funktionswert an der Stelle $x_0 = 4$.

  $$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(4+h) &= \lim_{h\to 0} f(x_0+h) \\ &= \lim_{h\to 0} (4+h)^3 + 2\cdot(4+h) \\ &= \lim_{h\to 0} h^3 + 12h^2 + 50h + 72 \\ &= 72 \end{aligned}$$

  3. Berechnung des linksseitigen Grenzwertes zum Funktionswert an der Stelle $x_0 = 4$.

  $$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(4-h) &= \lim_{h\to 0} f(x_0-h) \\ &= \lim_{h\to 0} (4-h)^3 + 2\cdot(4-h) \\ &= \lim_{h\to 0} -h^3 + 12h^2 - 50h + 72 \\ &= 72 \end{aligned}$$

4. Ergebnis: An der Stelle $x_0 = 4$ gilt

$$\lim_{h\to 0} f(4+h) = \lim_{h\to 0} f(4-h) = f(4) = 72$$

$$\text{bzw.} \qquad \lim_{x\to 4} f(x) = f(4) = 72$$

In Worten ausgedrückt: An der Stelle $x_0 = 4$ stimmen der rechtsseitige und der linksseitige Grenzwert zum Funktionswert mit dem an dieser Stelle errechneten Funktionswert überein. Somit ist die Funktion an der Stelle $x_0 = 4$ stetig.

- Untersuchen Sie die Funktion $f_a(x)$ an der Nahtstelle auf Stetigkeit.

$$f_a(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 1 & \text{für } x \leq 2 \\ ax + 5 & \text{für } x > 2,\ a \in \mathbf{R} \end{cases}$$

1. Funktionswert an der Nahtstelle $x_0 = 2$ berechnen:

$$\begin{aligned} f_a(x_0) &= 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 \\ f_a(x_0) &= 13 \end{aligned}$$

2. Linksseitigen Grenzwert zu x_0 ermitteln:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(2-h) &= \lim_{h\to 0}[(2-h)^2 + 4(2-h) + 1] \\ &= \lim_{h\to 0}[4 - 2h + h^2 + 8 - 4h + 1] \\ &= 13 \end{aligned}$$

3. Rechtsseitigen Grenzwert zu x_0 bestimmen:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(2+h) &= \lim_{h\to 0}[a(2+h) + 5] \\ &= \lim_{h\to 0}[2a + ah + 5] \\ &= 2a + 5 \end{aligned}$$

4. Soll die Funktion an der Stelle x_0 stetig sein, so muss der Funktionswert sowohl mit dem rechtsseitigen, als auch mit dem linksseitigen Grenzwert übereinstimmen.
Der Funktionswert stimmt bereits mit dem linksseitigen Grenzwert überein, aber für den rechtsseitigen muss gelten:

$$\begin{aligned} 2a + 5 &= 13 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Funktion ist an der Stelle $x_0 = 2$ nur für $a = 4$ stetig.

6.2 Stetigkeit einer ganzrationalen Funktion

Soll nun untersucht werden ob eine Funktion nicht nur an einer bestimmten Stelle stetig ist, sondern im ganzen Definitionsbereich, so muss die Funktion für alle erlaubten x-Werte untersucht werden.

Da dies nicht möglich ist wird ein beliebiger, aber allgemeiner x-Wert $x_0 \in \mathbf{D}$ ausgewählt, und der Nachweis mit ihm geführt.

Beispiele:

- $f(x) = 6x^3 - 2 \cdot (x+4)^2$

  Berechnung des Funktionswertes an der Stelle x_0:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 6x_0^3 - 2 \cdot (x_0+4)^2 \\ &= 6x_0^3 - 2x_0^2 - 16x_0 - 32 \end{aligned}$$

  Berechnung des linksseitigen Grenzwertes der Funktion an der Stelle x_0:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} f(x_0 - h) &= \lim_{h \to 0} [6(x_0 - h)^3 - 2 \cdot ((x_0 - h) + 4)^2] \\ &= \lim_{h \to 0} [6x_0^3 - 2x_0^2 + (4h - 16)x_0 - 6h^3 - 2h^2 + 16h - 32] \\ &= 6x_0^3 - 2x_0^2 - 16x_0 - 32 \end{aligned}$$

  Berechnung des rechtsseitigen Grenzwertes der Funktion an der Stelle x_0:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) &= \lim_{h \to 0} [6(x_0 + h)^3 - 2 \cdot ((x_0 + h) + 4)^2] \\ &= \lim_{h \to 0} [6x_0^3 - 2x_0^2 + (-4h - 16)x_0 + 6h^3 - 2h^2 + 16h - 32] \\ &= 6x_0^3 - 2x_0^2 - 16x_0 - 32 \end{aligned}$$

  Der links- und der rechtsseitige Grenzwert stimmen mit dem Funktionswert an der allgemeinen Stelle x_0 überein. Damit ist die Funktion an der Stelle x_0 stetig. Da x_0 für einen beliebigen Wert aus der Definitionsmenge steht, ist die Funktion in ganz **D** stetig.

- $x \mapsto f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 + 2 & \text{für } x \leq -4 \\ 0,5 \cdot |x| & \text{für } x > -4 \end{cases}$

  Um die Funktion auf Stetigkeit untersuchen zu können muss zunächst der Betrag aufgelöst werden:

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 + 2 & \text{für } x \leq -4 \\ 0,5 \cdot (-x) & \text{für } -4 < x \leq 0 \\ 0,5 \cdot x & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

  Nun muss für beide Nahtstellen ($x_1 = -4$ und $x_2 = 0$) eine Untersuchung auf Stetigkeit erfolgen. Also: jeweils links- und rechtsseitigen Grenzwert, sowie den Funktionswert an der Nahtstelle berechnen. Stimmen alle drei überein ist die Funktion an dieser Stelle stetig.
  Hinweis: Diese Funktion ist komplett stetig.

- $f_k(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 - x + 1 & \text{für } x < 2 \\ -\frac{1}{4} \cdot kx^2 + \frac{1}{2}(k^2+1) \cdot x & \text{für } x \geq 2, \quad k \in \mathbf{R}^+ \end{cases}$

  Man erhält zunächst als mögliche Ergebnisse $k = -1$ und $k = 2$. Da laut Definitionsbereich jedoch $k \in \mathbf{R}^+$ gilt, ist $f_k(x)$ nur für $k = 2$ an der Stelle $x_0 = 2$ und damit in ganz $\mathbf{R}$ stetig.

- $f(x) = x \cdot |x - 3|$

  Zunächst muss die Funktion aufgeteilt werden:

  $$f(x) = \begin{cases} x \cdot (-1) \cdot (x-3) & \text{für } x < 3 \\ x \cdot (x-3) & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$$

  Die Funktion ist an der Stelle $x_0 = 3$ und damit in ganz $\mathbf{R}$ stetig.

6.3 Stetigkeit aller ganzrationaler Funktionen

Wird aus zwei stetigen Funktionen eine Summe, Differenz oder ein Produkt gebildet, so ist das Ergebnis in der gemeinsamen Definitionsmenge wieder stetig. Der Quotient zweier stetiger Funktionen ist in der Definitionsmenge des Quotienten eine stetige Funkion.

> Sind die Funktionen f in $\mathbf{D}_f$ und g in $\mathbf{D}_g$ stetig, so gilt:
>
> $$f+g, \quad f-g \quad \text{und} \quad f \cdot g \quad \text{sind stetig in } \mathbf{D}_f \cap \mathbf{D}_g$$
>
> $$\frac{f}{g} \text{ ist stetig in } \mathbf{D}_f \cap (\mathbf{D}_g \backslash \{x|g(x) = 0\})$$

Die konstante Funktion $f : x \mapsto r, \quad \mathbf{D}_f = \mathbf{R}$ und die lineare Funktion $g : x \mapsto x, \quad \mathbf{D}_g = \mathbf{R}$ sind stetig in $\mathbf{R}$. Beweis:

$$f(x_0) = r \qquad\qquad g(x_0) = x_0$$

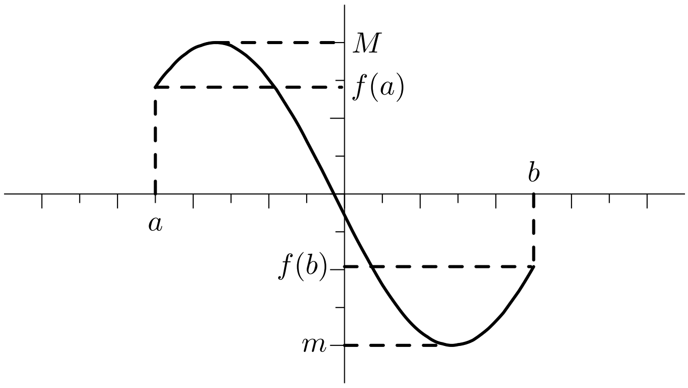
$$\lim_{h\to 0} f(x_0 - h) = \lim_{h\to 0}(r) = r \qquad\qquad \lim_{h\to 0} g(x_0 - h) = \lim_{h\to 0}(x_0 - h) = x_0$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h\to 0}(r) = r \qquad\qquad \lim_{h\to 0} g(x_0 + h) = \lim_{h\to 0}(x_0 + h) = x_0$$

Da sämtliche ganzrationale Funktionen durch Verkettungen aus linearer und konstanter Funktion zusammengesetzt werden können gilt mit dem Satz dass Summen, Differenzen und Produkte von in $\mathbf{R}$ stetigen Funktionen wieder stetige Funktionen sind:

> Jede ganzrationale Funktion
>
> $$f : x \mapsto f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad \mathbf{D} = \mathbf{R}$$
>
> ist in ganz $\mathbf{R}$ eine stetige Funktion.

6.4 Lehrsätze für stetige Funktionen



Extremwertsatz:
Eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetige und nichtkonstante Funktion ist dort beschränkt und besitzt einen kleinsten, wie auch einen größten Funktionswert.

Zwischenwertsatz:
Eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetige Funktion f nimmt jede zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gelegene reelle Zahl r mindestens einmal als Funktionswert an.

Nullstellensatz:
Eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetige Funktion f, die in den Randstellen a und b Funktionswerte mit verschiedenen Vorzeichen hat $(f(a) \cdot f(b) < 0)$, hat im Inneren des Intervalls $[a; b]$ mindestens eine Nullstelle.
Es gilt: $f(c) = 0$ mit $a < c < b$.