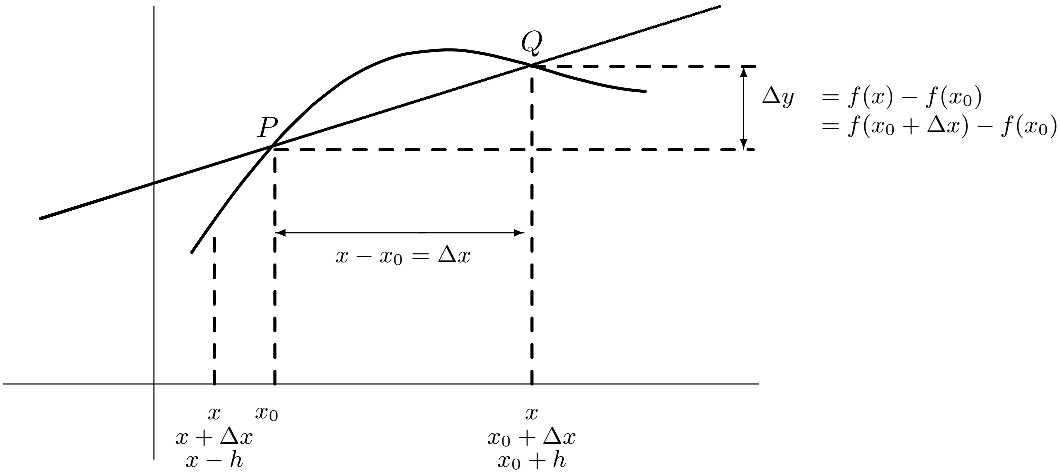
7 Ableitung einer Funktion

7.1 Der Differenzenquotient



Soll ein Punkt x in unmittelbarer Umgebung von x_0 bezeichnet werden, so gibt es dafür drei Möglichkeiten:

- Man nennt die benachbarte Stelle x und legt fest, dass $x \neq x_0$. Der Nachteil dieser Methode ist, dass man nicht weiß ob x links oder rechts von x_0 liegt.
- Zur Stelle x_0 wird ein Zuwachs Δx angegeben der sowohl positiv, als auch negativ sein kann. Damit liegt $x = x_0 + \Delta x, \quad \Delta x < 0$ links von x_0, während $x = x_0 + \Delta x, \quad \Delta x > 0$ rechts von der bekannten Stelle liegt.
- Mit Hilfe der stets positiven Zahl h kann eine Stelle links von x_0 mit $x = x_0 - h$, eine Stelle rechts von x_0 dagegen mit $x_0 + h$ angegeben werden.

Interessiert nur die *absolute Änderung* der Funktionswerte sobald man sich etwas von x_0 entfernt, so kann die Gleichheit, Zunahme oder Abnahme der Funktionswerte durch Bildung der Differenz $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ untersucht werden.

Ist jedoch die *Stärke der Änderung* der Funktionswerte von Bedeutung, dann muss die Änderung der Funktionswerte Δy bezogen auf die zugehörige Änderung der x-Werte Δx betrachtet werden:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Für die Bildung des Differenzenquotienten (=**mittlere Änderungsrate**) der Funktion f bezüglich der Stelle x_0 gibt es also drei Möglichkeiten:

- Möglichkeit 1:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{mit} \quad x \neq x_0$$

- Möglichkeit 2:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad \text{mit} \quad \Delta x \neq 0$$

- Möglichkeit 3:

linksseitiger Differenzenquotient	rechtsseitiger Differenzenquotient
$\frac{\Delta y}{-h} = \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$	$\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Diese Möglichkeit muss immer dann angewendet werden wenn die Funktion $f(x)$ auf der linken und rechten Seite von x_0 durch verschiedene Funktionsterme gegeben ist. Dies tritt z. B. bei abschnittsweise definierten Funktionen oder bei Betragsfunktionen auf.

Beispiele:

- Ermitteln Sie die links- und rechtsseitige mittlere Änderungsrate der Funktion $f(x) = x \cdot |x - 3|$ an der Stelle $x_0 = 3$.

  Zunächst muss der Betrag aufgelöst werden:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot (x-3) & \text{für } x \geq 3 \\ x \cdot (-1) \cdot (x-3) & \text{für } x < 3 \end{cases}$$

  Linksseitiger Differenzenquotient an der Stelle $x_0 = 3$:

$$\frac{f(3-h) - f(3)}{-h} = \frac{(3-h) \cdot (-1) \cdot (3-h-3) - 0}{-h} = \frac{(3-h) \cdot h}{-h} = \underline{\underline{-3+h}}$$

  Rechtsseitiger Differenzenquotient an der Stelle $x_0 = 3$:

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h) \cdot (3+h-3) - 0}{h} = \frac{(3+h) \cdot h}{h} = \underline{\underline{3+h}}$$

- Stellen Sie mit der h-Methode den links- und rechtsseitigen Differenzenquotient der Funktion $f(x) = x^2 + 3x - 4$ an der Stelle $x_0 = 5$ auf.

  Linksseitiger Differenzenquotient an der Stelle $x_0 = 5$:

$$\frac{f(5-h) - f(5)}{-h} = \frac{[(5-h)^2 + 3(5-h) - 4] - [5^2 + 3 \cdot 5 - 4]}{-h} = \frac{-h(-h+13)}{-h} = \underline{\underline{13-h}}$$

  Rechtsseitiger Differenzenquotient an der Stelle $x_0 = 5$:

$$\frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \frac{(5+h)^2 + 3(5+h) - 4] - [5^2 + 3 \cdot 5 - 4]}{h} = \frac{h(h+13)}{h} = \underline{\underline{13+h}}$$

- Gegeben ist die Weg-Zeit-Funktion einer linearen Bewegung mit

$$s(t) = -5\frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 40\frac{m}{s} \cdot t$$

Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$.
$\rightarrow$ Man betrachtet den festen Zeitpunkt t_0 und den variablen Zeitpunkt t mit $t > t_0$. Vom Zeitpunkt t_0 bis t verstreicht also die Zeit $t - t_0 = \Delta t > 0$. In dieser Zeit wird die Strecke $\Delta s = s(t) - s(t_0)$ zurück gelegt.
Der Differenzenquotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ (=mittlere Änderungsrate) beschreibt in diesem Fall die Änderung des Weges bezogen auf die dafür benötigte Zeit. In der Technik wird dies als mittlere Geschwindigkeit bezeichnet.

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta s}{\Delta t} &= \frac{\left(-5\frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 40\frac{m}{s} \cdot t\right) - \left(-5\frac{m}{s^2} \cdot t_0^2 + 40\frac{m}{s} \cdot t_0\right)}{t - t_0} \\
&= \frac{-5\frac{m}{s^2} \cdot (t^2 - t_0^2) + 40\frac{m}{s} \cdot (t - t_0)}{t - t_0} \\
&= \frac{-5\frac{m}{s^2} \cdot (t - t_0)(t + t_0) + 40\frac{m}{s} \cdot (t - t_0)}{t - t_0} \\
&= -5\frac{m}{s^2} \cdot (t + t_0) + 40\frac{m}{s}
\end{aligned}$$

Für die Zeitpunkte $t_0 = 2s$ und $t = 5s$ kann damit eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 5\frac{m}{s}$ berechnet werden.

7.2 Vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten

Im letzten Beispiel des vorangegangenen Abschnitts wurde die Durchschnittsgeschwindigkeit als mittlere Änderungsrate $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ berechnet.

Interessant ist nun was passiert, wenn die zwei Zeitpunkte t_0 und t immer weiter zusammen rücken. Hat der Differenzenquotient einen Grenzwert für $\Delta t \rightarrow 0$ (was gleichbedeutend mit $t \rightarrow t_0$ ist)?

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \left[-5\frac{m}{s^2} \cdot (t + t_0) + 40\frac{m}{s}\right] = -10\frac{m}{s^2} \cdot t_0 + 40\frac{m}{s}$$

Diesen Grenzwert können wir als die Momentangeschwindigkeit $v(t_0)$ der Bewegung zum Zeitpunkt t_0 auffassen:

$$v(t_0) = -10\frac{m}{s^2} \cdot t_0 + 40\frac{m}{s}$$

Zum Zeitpunkt $t_0 = 2s$ beträgt die Momentangeschwindigkeit demnach

$$v(2s) = -10\frac{m}{s^2} \cdot 2s + 40\frac{m}{s} = 20\frac{m}{s}$$

Der Grenzwert des Differenzenquotienten heißt **Differenzialquotient** oder **lokale Änderungsrate** der Funktion $s(t)$ an der Stelle t_0. In der Technik/Physik wird die lokale Änderungsrate einer Ort-Zeit-Funktion als Momentangeschwindigkeit bezeichnet.

Hat für die Funktion f mit $y = f(x)$ der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ einen Grenzwert für $\Delta x \to 0$ (also für $x \to x_0$), dann heißt dieser Grenzwert der Differenzialquotient von f an der Stelle x_0.

Er wird mit $\frac{dy}{dx}$ (lies: dy nach dx) bezeichnet:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Dabei ist $\frac{dy}{dx}$ nicht als Bruch aufzufassen! Es wird lediglich symbolisch der vollzogene Grenzübergang $\Delta x \to 0$ ausgedrückt.

Folgende Schreibweisen können bei der Berechnung des Differenzialquotienten gleichwertig verwendet werden:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

7.3 Die erste Ableitung als Differenzialquotient

In der Abbildung auf Seite 96 sei der Punkt P fest während der Punkt Q variabel auf dem Graphen liegt. Die Steigung der Sekante durch diese zwei Punkte entspricht der **mittleren Steigung** des Graphen zwischen P und Q. Damit kann auch der Steigungswinkel φ angegeben werden:

$$\tan \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Je weiter Q auf dem Graphen an P heran rückt, desto kleiner wird Δx. Dabei dreht sich die Sekante im Punkt P.

Existiert für $\Delta x \to 0$ der Grenzwert m des Differenzenquotienten, so heißt dies geometrisch interpretiert dass bei einer Annäherung von Q an P die zugehörigen Sekanten immer in dieselbe Grenzsekante mit der Steigung m in P übergeht.

Die Grenzsekante im Kurvenpunkt $P(x_0|f(x_0))$ einer Funktion f mit $y = f(x)$ mit der Steigung

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißt **Tangente** im Punkt P des Graphen von f.

Die Steigung des Graphen im Punkt P entspricht der Steigung der Tangente in diesem Punkt P.

Der Grenzwert des Differenzenquotienten wird auch mit $f'(x_0)$ (lies: f Strich an der Stelle x_0) bezeichnet und heißt **Differenzialquotient** oder **1. Ableitung** der Funktion f **an der Stelle** x_0.

Mit der bereits eingeführten Bezeichnung $\frac{dy}{dx}$ für den Differenzialquotienten gilt:

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Eine Funktion f heißt an der Stelle $x_0 \in \mathbf{D}_f$ **differenzierbar**, wenn der Differenzenquotient von f an der Stelle x_0 für $x \to x_0$ einen Grenzwert hat.

Fazit: Die 1. Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangenten im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ an den Graphen von f und entspricht der Steigung des Graphen an dieser Stelle.

7.4 Aufstellen der Tangentengleichung in $\mathbf{P(x_0|f(x_0))}$

Da eine Tangente stets eine Gerade ist lautet ihre allgemeine Form $y = m \cdot x + t$.

- Wie im vorherigen Abschnitt erarbeitet wird die Steigung der Tangenten im Punkt x_0 auch mit $f'(x_0)$ bezeichnet. Damit erhält man für die Tangente die Gleichung:

$$y = f'(x_0) \cdot x + t$$

- Da die Tangente den Graphen im Punkt x_0 berührt ist der Punkt $P(x_0|f(x_0))$ sicher ein Punkt der Tangente. Somit müssen seine Koordinaten die Tangentengleichung erfüllen:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + t$$

- Mit Hilfe dieses Ansatzes kann der y-Abschnitt der Tangentengleichung ermittelt werden:

$$t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

- Nun kann die Gleichung der Tangente aufgestellt werden:

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

- Durch Umstellen und Ausklammern erhält man die Form der Tangentengleichung wie sie auch in der Formelsammlung zu finden ist:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Beispiele:

- Gegeben sei die Funktion $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 9x - 2$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten im Punkt $P(2|16)$.

  Zunächst wird der Differenzenquotient an der Stelle $x_0 = 2$ aufgestellt und sein Grenzwert berechnet:

$$\begin{aligned} m = f'(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(2x^3 - 4x^2 + 9x - 2) - (2\cdot 2^3 - 4\cdot 2^2 + 9\cdot 2 - 2)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{2x^3 - 4x^2 + 9x - 18}{x-2} \end{aligned}$$

  Beim Versuch diesen Grenzwert durch einsetzen von $x = 2$ zu lösen erkennt man, dass man einen Ausdruck der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erhält. Führt man im Zähler jedoch eine Faktorzerlegung durch, so erkennt man, dass der Nennerterm auch ein Linearfaktor des Zählers ist:

$$\begin{aligned} m = f'(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{(2x^2 + 9)\cdot(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} 2x^2 + 9 \\ &= 17 \end{aligned}$$

  Mit Hilfe der errechneten Steigung $m = 17$ im Punkt P und den Koordinaten des Punktes P kann nun der y-Abschnitt der Tangentengleichung berechnet werden:

$$\begin{aligned} y &= 17\cdot x + t \\ 16 &= 17\cdot 2 + t \\ t &= -18 \end{aligned}$$

  Damit lautet die Gleichung der Tangente an $f(x)$ im Punkt $P(2|16)$:

$$y = 17\cdot x - 18$$

- Gegeben sei erneut die Funktion $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 9x - 2$. Berechnen Sie die Steigung der Tangente in einem beliebigen Punkt $P(x_0|f(x_0))$.

  Zur Berechnung der Steigung eignen sich zwei Methoden:
  Entweder:

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(x_0 + \Delta x)^3 - 4(x_0 + \Delta x)^2 + 9(x_0 + \Delta x) - 2] - [2x_0^3 - 4x_0^2 + 9x_0 - 2]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x_0^2 \Delta x + 6x_0(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 8x_0 \Delta x - 4(\Delta x)^2 + 9\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 6x_0^2 + 6x_0 \Delta x + 2(\Delta x)^2 - 8x_0 - 4\Delta x + 9 \\
&= 6x_0^2 - 8x_0 + 9
\end{aligned}
$$

  Oder:

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(2x^3 - 4x^2 + 9x - 2) - (2x_0^3 - 4x_0^2 + 9x_0 - 2)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{2(x^3 - x_0^3) - 4(x^2 - x_0^2) + 9(x - x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{2(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2) - 4(x - x_0)(x + x_0) + 9(x - x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} 2(x^2 + xx_0 + x_0^2) - 4(x + x_0) + 9 \\
&= 6x_0^2 - 8x_0 + 9
\end{aligned}
$$

  Damit hat man eine Gleichung für die Steigung der Tangente an jeder beliebigen Stelle x_0 der Funktion $f(x)$.

  Für die Stelle $x_0 = 2$ erhält man damit die Steigung der Tangenten $m = f'(2) = 17$.

  Um auch die Gleichung der Tangenten angeben zu können muss nun noch der y-Wert der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 2$ berechnet werden: $f(2) = 16$.

  Mit den Koordinaten des Punktes $P(2|16)$ und der Steigung der Tangenten kann nun die Tangentengleichung ermittelt werden:

$$
\begin{aligned}
y &= 17 \cdot x + t \\
16 &= 17 \cdot 2 + t \\
t &= -18
\end{aligned}
$$

  Damit lautet die Gleichung der Tangente an $f(x)$ im Punkt $P(2|16)$:

$$\underline{\underline{y = 17 \cdot x - 18}}$$

7.5 Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Die Unterscheidung zwischen den Begriffen „Differenzierbarkeit“ und „Stetigkeit“ ist sehr wichtig. Darum noch einmal:

Ist eine Funktion stetig, so kann ihr Graph ohne absetzen des Stiftes gezeichnet werden. Der Verlauf des Graphen kann jedoch durchaus Knicke aufweisen. Sobald eine Funktion differenzierbar ist hat ihr Graph einen glatten Verlauf. Das heißt es existiert für jeden Punkt des Graphen eine eindeutige Tangente.

Der folgende, nicht umkehrbare Satz gibt den Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit wider:

> Ist eine Funktion f an einer inneren Stelle $x_0 \in \mathbf{D_f}$ differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

Beispiele:

- Gegeben sei die Funktion $f(x) = |x-2| + 1 \qquad \mathbf{D} = \mathbf{R}$.
  Untersuchen Sie diese Funktion auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

  Zunächst muss der Betrag aufgelöst werden:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{für } x \geq 2 \\ -x+3 & \text{für } x < 2 \end{cases}$$

  $\rightarrow$ Stetigkeit:
  Da es sich bei jeder der beiden Funktionen um eine ganzrationale Funktion handelt sind sie für sich genommen sicher stetig. Interressant ist die Nahtstelle $x_0 = 2$.
  Linksseitiger Grenzwert:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} f(2-h) &= \lim_{h \to 0} -(2-h) + 3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

  Rechtsseitiger Grenzwert:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} f(2+h) &= \lim_{h \to 0} (2+h) - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

  Funktionswert an der Nahtstelle $x_0 = 2$:

$$\begin{aligned} f(2) &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

  Linksseiter und rechtsseitiger Grenzwert stimmen mit dem Funktionswert an der Stelle $x_0 = 2$ überein. Damit ist die Funktion stetig.

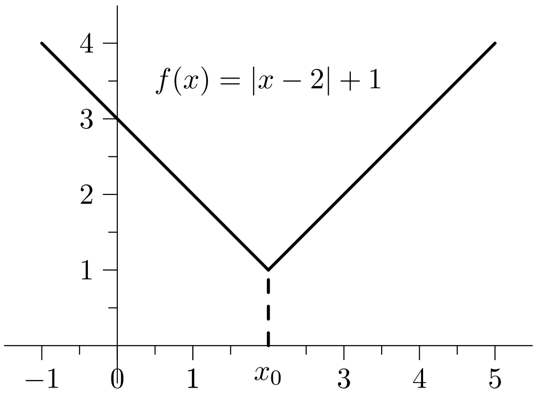
→Differenzierbarkeit:
Es muss untersucht werden ob die Grenzwerte des links- und rechtsseigen Differenzenquotienten übereinstimmen. D. h. ob man - unabhängig davon ob man sich von links oder rechts der Nahtstelle annähert - die gleiche Grenzsekante (=Tangente) im Punkt $x_0 = 2$ erhält.
Linksseitige Ableitung:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(2-h) + 3 - 1}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{-h} = -1$$

Rechtsseitige Ableitung:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h) - 1 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Links- und rechtsseitige Ableitung stimmen nicht überein, d. h. die Steigung der Tangente an der Nahtstelle hängt davon ab ob man sich dieser von links oder von rechts annähert. Damit ist die Funktion an der Nahtstelle $x_0 = 2$ nicht differenzierbar.



- Untersuchen Sie nachfolgende Funktion auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 7,75x + 11 & \text{für } x \leq -1,5 \\ x^3 - 2x + 2 & \text{für } x > -1,5 \end{cases}$$

→ $f(x)$ ist stetig und differenzierbar.

- Untersuchen Sie nachfolgende Funktion auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{für } x \leq 1 \\ -x + 4 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Stetigkeit:

$$\lim_{h \to 0} f(1-h) = \lim_{h \to 0} (1-h)^2 + 2 = \lim_{h \to 0} 3 - 2h + h^2 = 3$$

$$\lim_{h \to 0} f(1+h) = \lim_{h \to 0} -(1+h) + 4 = \lim_{h \to 0} -1 - h + 4 = 3$$

$$f(1) = 3$$

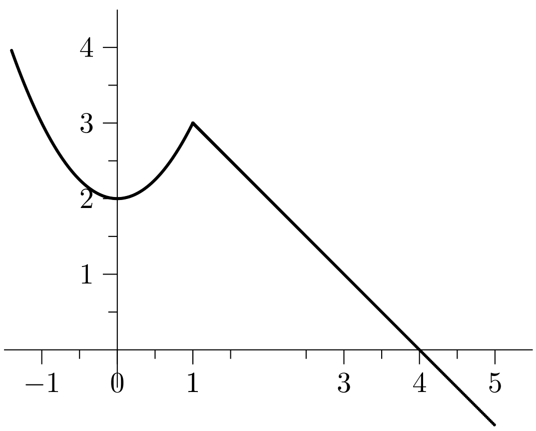
$$\rightarrow f(1-h) = f(1+h) = f(1) \qquad \rightarrow \qquad f \text{ ist stetig.}$$

$\rightarrow$ Differenzierbarkeit:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(1-h)^2 + 2 - (1^2 + 2)}{-h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1 - 2h + h^2 + 2 - 3}{-h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-2h + h^2}{-h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-h(2-h)}{-h} \\ &= \lim_{h \to 0} (2-h) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{-(1+h) + 4 - (1^2 + 2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-1 - h + 4 - 3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Die links- und rechtsseitige Ableitung stimmen an der Stelle $x_0 = 1$ nicht überein. Deshalb ist die Funktion an dieser Stelle nicht differenzierbar.



- Untersuchen Sie nachfolgende Funktion auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit:
$$g(x) = \begin{cases} -0,5 \cdot (x+1)^2 + 3 & \text{für } x < 0 \\ 0,5x^2 - x + 2,5 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$
$\rightarrow g(x)$ ist stetig und differenzierbar.

- Untersuchen Sie nachfolgende Funktion auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit:
$$h(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-2} & \text{für } x > 1 \\ -3x + 1 & \text{für } x \leq 1 \end{cases}$$
$\rightarrow h(x)$ ist nicht stetig bei $x_0 = 2$ und deshalb auch nicht differenzierbar. Wird $\mathbf{D}$ eingeschränkt (z. B. auf $\mathbf{D} =]-\infty; 2[$), dann ist $h(x)$ stetig und differenzierbar.

7.6 Ableitungsregeln

Hausaufgabe:
Untersuchen Sie nachfolgende Funktionen auf Differenzierbarkeit.

a)	$f(x) = 3$	*e)*	$g(x) = -4x + 2$
b)	$g(x) = 7x$	*f)*	$h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 3$
c)	$h(x) = 2x^2 - 3x$	*g)*	$f(x) = -x^3 - 7x + 1$
d)	$f(x) = x^3 + 9x^2 - 4$		

Die gestellten Aufgaben werden direkt den Lösungen gegenübergestellt:

$f(x)$	$y = 3$	$y = 7x^1$	$y = 2x^2 - 3x^1$	$y = x^3 + 9x^2 - 4$
$f'(x)$	$y = 3 \cdot 0$	$y = 7 \cdot 1 \cdot x^0$	$y = 2 \cdot 2 \cdot x^1 - 3 \cdot 1 \cdot x^0$	$y = 1 \cdot 3x^2 + 9 \cdot 2x^1 + 0$
$f'(x)$	$y = 0$	$y = 7$	$y = 4x - 3$	$y = 3x^2 + 18x$

$f(x)$	$y = -4x + 2$	$y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 3$	$y = -x^3 - 7x + 1$
$f'(x)$	$y = -4 \cdot 1x^0 + 0$	$y = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^1 + 4 \cdot 1 \cdot x^0 + 0$	$y = -1 \cdot 3 \cdot x^2 - 7 \cdot x^0 + 0$
$f'(x)$	$y = -4x$	$y = x + 4$	$y = -3x^2 - 7$

Bei vorhergehenden Aufgaben scheint ein bestimmtes Vorgehensmuster zu existieren. Bevor daraus jedoch feste Regeln abgeleitet werden soll das vermutete Regelwerk allgemein bewiesen werden.

7.6.1 Ableitung der konstanten Funktion

Von der gegebenen konstanten Funktion $f(x) = c$ soll die erste Ableitung berechnet werden. Dazu wird zunächst der Differenzenquotient gebildet:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Da bereits der Differenzenquotient Null ist kann auch der Grenzwert nur den Wert Null annehmen.
→ Vergleiche Beispiel $f(x) = 3$.

7.6.2 Ableitung der Potenzfunktion

Gegeben sei nun die Potenzfunktion $f(x) = a \cdot x^n$, wobei n eine natürliche Zahl sei.

Um von dieser Funktion die erste Ableitung zu erhalten wird zunächst der Differenzenquotient an der Stelle x_0 berechnet und anschließend der Grenzwert für $x \to x_0$ gebildet.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \frac{ax^n - ax_0^n}{x-x_0} \\
&= a \cdot \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} \\
&= a \cdot \frac{(x-x_0)\cdot(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x-x_0} \\
&= a \cdot (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite stehen in der Klammer nun n Summanden. Bildet man den Grenzwert $x \to x_0$, so lautet jeder der Summanden x_0^{n-1}, so dass der Klammerausdruck zu $n \cdot x_0^{n-1}$ zusammengefasst werden kann. Die gesamte erste Ableitung lautet damit $f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$.
→ Vergleiche Beispiel $f(x) = 7x$

7.6.3 Ableitung einer Summe von Funktionen

Gegeben seien die beiden differenzierbaren Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ woraus die Funktion $f(x) = g(x) + h(x)$ gebildet wird. Gesucht ist die erste Ableitung der Summenfunktion $f(x)$.

Fall 1:
Die Funktion $h(x)$ sei eine konstante Funktion, z. B. $h(x) = c$.

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[g(x+\Delta x) + c] - [g(x) + c]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) + c - g(x) - c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= g'(x) \end{aligned}$$

Die additive Konstante ohne freie Variable x ist beim Differenzieren also einfach entfallen.
→ Vergleiche Beispiel $g(x) = -4x + 2$.
Fall 2:
$g(x)$ und $h(x)$ seinen beides differenzierbare Funktionen.

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[g(x+\Delta x) + h(x+\Delta x] - [g(x) + h(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) + h(x+\Delta x) - g(x) - h(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Nach den Regeln der Grenzwertrechnung entspricht der Grenzwert einer Summe der Summe der einzelnen Grenzwerte aller Summanden. Damit kann man vorherige Gleichung weiter umformulieren:

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) + h(x+\Delta x) - g(x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= g'(x) + h'(x) \end{aligned}$$

→ Vergleiche Beispiel $h(x) = 2x^2 - 3x$.

7.6.4 Ableitung einer ganzrationalen Funktion

Ist eine ganzrationale Funktion gegeben die aus mehreren Gliedern besteht, so gilt selbstverständlich auch hier die Summenregel.

Gegeben sei die Funktion $f(x) = g(x) + h(x) + u(x) = g(x) + [h(x) + u(x)]$

Wird der Ausdruck $[h(x) + u(x)]$ durch $v(x)$ substituiert, so erhält man einen Ausdruck aus zwei Summanden. Dass dieser differenzierbar ist wurde im vorherigen Abschnitt 7.6.3 gezeigt.

$$f(x) = g(x) + v(x)$$
$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad f'(x) &= g'(x) + v'(x) \\ &= g'(x) + [h(x) + u(x)]' \\ &= g'(x) + h'(x) + u'(x) \end{aligned}$$

Besteht eine Funktion aus Summen oder Differenzen, so wird jedes Glied einzeln differenziert.
→ Vergleiche Beispiel $f(x) = x^3 + 9x^2 - 4$.

Ableitungsregeln:

- Die konstante Funktion $f(x) = c$, $c \in \mathbf{R}$ hat die Ableitung Null.

$$f(x) = c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

- Die Ableitung einer Potenzfunktion erhält man, indem man das Produkt aus dem Vorfaktor (gegebenenfalls der Wert 1), der ursprünglichen Hochzahl n und der Potenzfunktion x^{n-1}, deren Hochzahl $n-1$ genau um 1 kleiner ist als die ursprüngliche Hochzahl n, berechnet.

$$f(x) = a \cdot x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

- Eine Summe oder Differenz von Funktionen wird gliedweise differenziert. Enthält die Summe oder Differenz eine additive bzw. subtraktive Konstante, so entfällt diese beim differenzieren.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) + c \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \\ f(x) = g(x) \pm h(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \pm h'(x) \end{aligned}$$

- Eine algebraische Summe bzw. Differenz wird gliedweise differenziert.

$$f(x) = g(x) + h(x) + u(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) + h'(x) + u'(x)$$

Übungsaufgaben:
Geben Sie jeweils die erste Ableitung der Funktion an.

1) $f(x) = 12$

2) $f(x) = 14x^4$

3) $f(x) = 2x + 9$

4) $f(x) = -16 - 3x^2$

5) $f(x) = x^5$

6) $f(x) = -x^7$

7) $f(x) = x^0$

8) $f(x) = 4x^5 + 2x^3$

9) $f(x) = -11x^2 + 2x$

10) $f(x) = x^8 - 3x^2 + 7x$

11) $f(x) = x^{-3}$

12) $f(x) = -4x^{-5}$

13) $f(x) = \frac{1}{x}$

14) $f(x) = \frac{8}{x^3}$

15) $f(x) = 6 \cdot \frac{2}{4x^5}$

16) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

17) $f(x) = 9x^{11} + 4x^8 - 9x^3 + 3x - 2$

18) $f(x) = -4x^9 - 3x^4 + 8$

19) $f(x) = x^{\sqrt{2}}$

20) $f(x) = -4 \cdot \frac{3}{x^{-7}}$

Lösungen:

1) $f'(x) = 0$

2) $f'(x) = 56x^3$

3) $f'(x) = 2$

4) $f'(x) = -6x$

5) $f'(x) = 5x^4$

6) $f'(x) = -7x^6$

7) $f'(x) = 0$

8) $f'(x) = 20x^4 + 6x^2$

9) $f'(x) = -22x + 2$

10) $f'(x) = 8x^7 - 6x + 7$

11) $f'(x) = -3x^{-4}$

12) $f'(x) = 20x^{-6} = \frac{20}{x^6}$

13) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

14) $f'(x) = -24x^{-4} = \frac{-24}{x^4}$

15) $f'(x) = -15 \cdot \frac{1}{x^6}$

16) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$

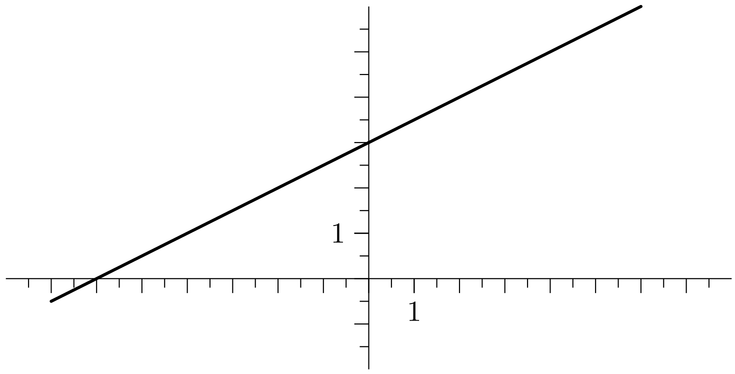
17) $f'(x) = 99x^{10} + 32x^7 - 27x^2 + 3$

18) $f'(x) = -36x^8 - 12x^3$

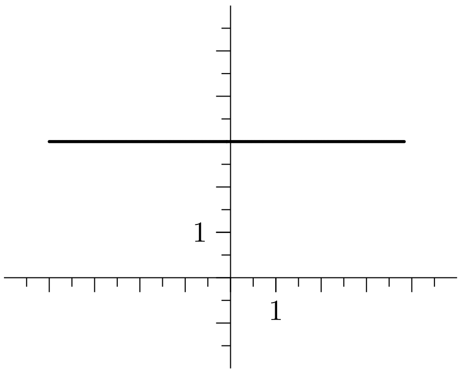
19) $f'(x) = \sqrt{2} \cdot x^{\sqrt{2}-1}$

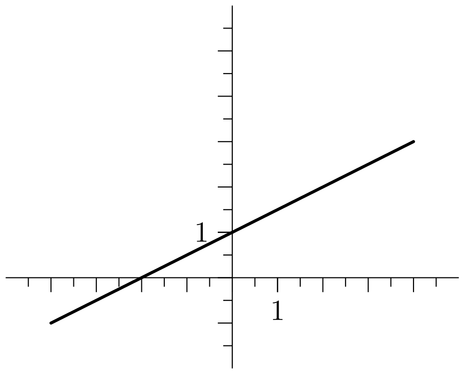
20) $f'(x) = -84 \cdot x^6$

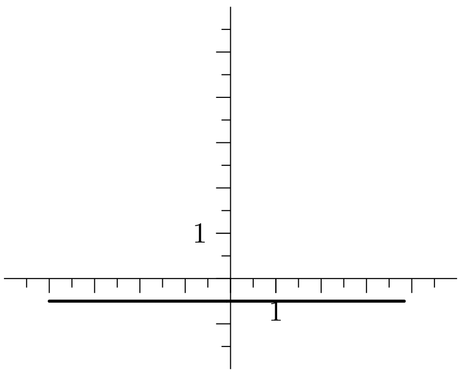
Gegeben ist folgender Graph der Funktion $f(x) = 0,5x + 3$:

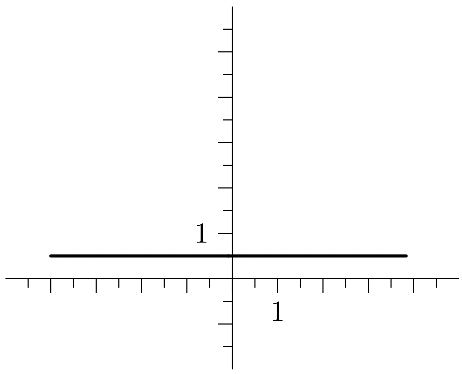


Entscheiden Sie, welcher der nachfolgenden Graphen die erste Ableitung zur oben gegebenen Funktion $f(x)$ darstellt.

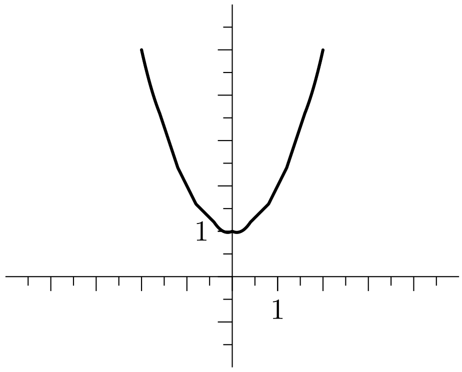




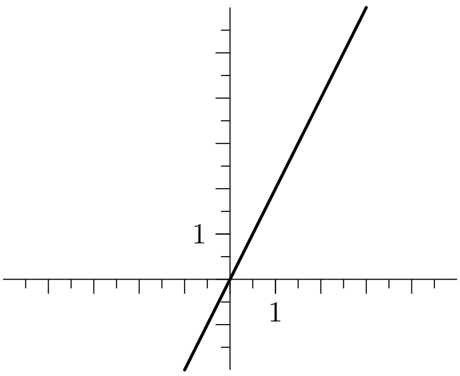


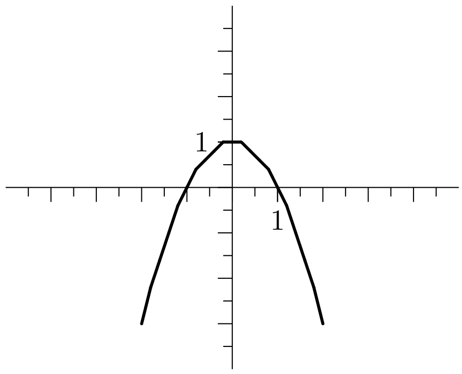


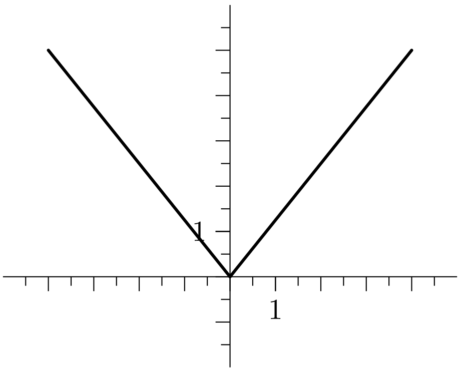
Gegeben ist folgender Graph der Funktion $f(x) = x^2 + 1$:

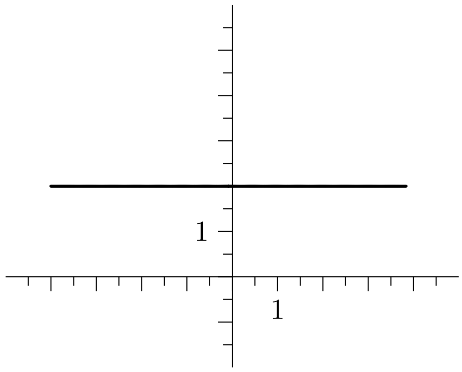


Entscheiden Sie, welcher der nachfolgenden Graphen die erste Ableitung zur oben gegebenen Funktion $f(x)$ darstellt.

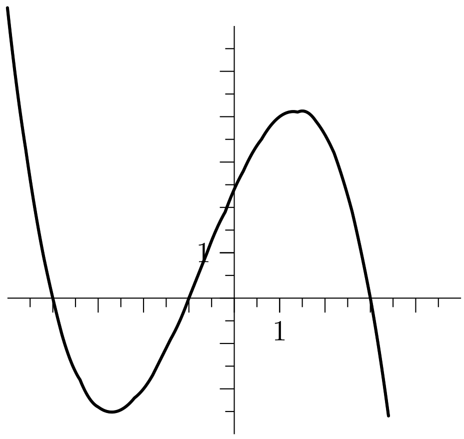




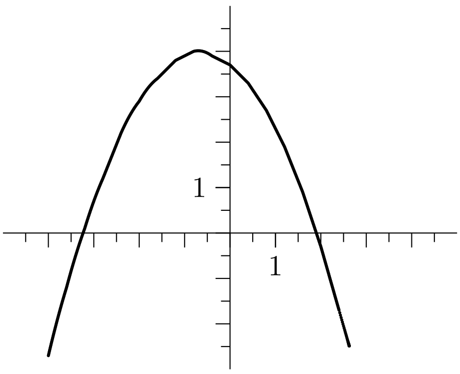


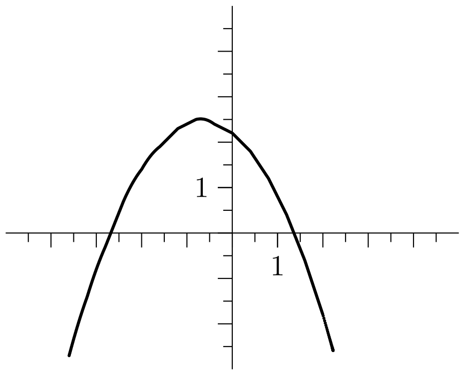


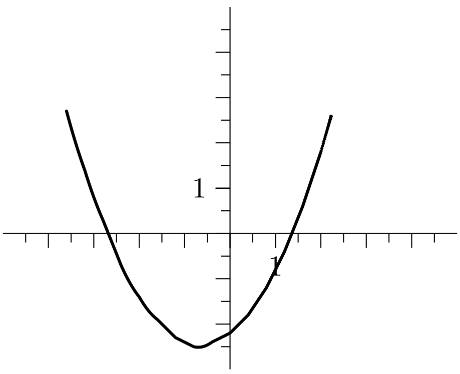
Gegeben ist folgender Graph der Funktion $f(x) = -0,2(x+4)(x+1)(x-3)$:

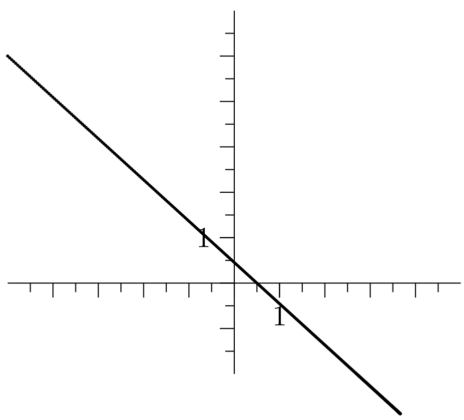


Entscheiden Sie, welcher der nachfolgenden Graphen die erste Ableitung zur oben gegebenen Funktion $f(x)$ darstellt.

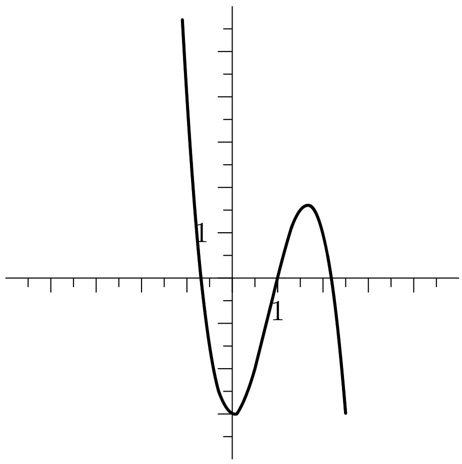




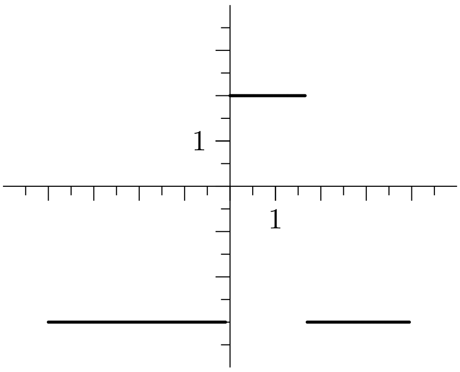


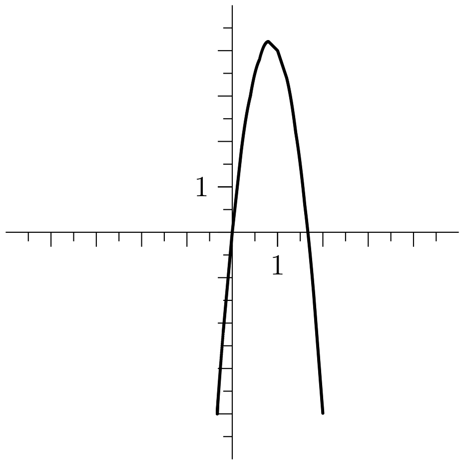


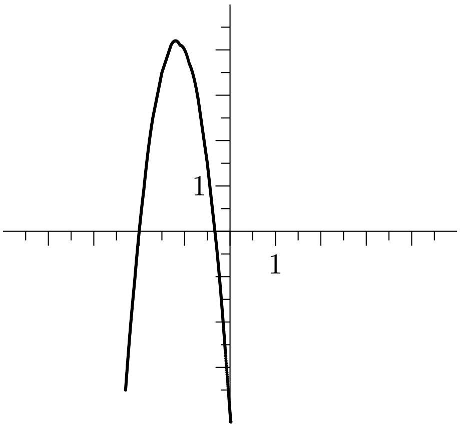
Gegeben ist folgender Graph der Funktion $f(x) = -2x^2 + 5x^2 - 3$:

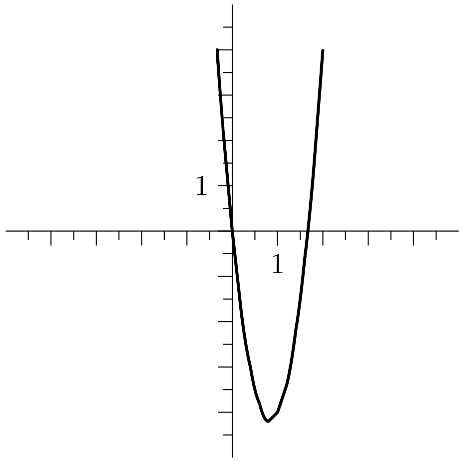


Entscheiden Sie, welcher der nachfolgenden Graphen die erste Ableitung zur oben gegebenen Funktion $f(x)$ darstellt.









7.7 Aufstellen der Normalengleichung in $\mathbf{P(x_0|f(x_0))}$

Die Normale auf den Graphen der Funktion $f(x)$ im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ ist eine Gerade, die auf dem Graphen der Funktion $f(x)$ im Punkt P senkrecht steht. Da es nicht möglich ist dass eine Gerade senkrecht auf einem Punkt steht behilft man sich damit, dass die Normale die Gerade ist, welche senkrecht auf der Tangente im Punkt P steht.

Um bei gegebenem Funktionsterm $f(x)$ die Gleichung der Normalen zu berechnen muss zunächst die Steigung der Tangente (also die erste Ableitung von $f(x)$) bestimmt werden.

Die Steigung der Normalen erhält man dann über den Zusammenhang:

$$m_{Normale} = -\frac{1}{m_{Tangente}}$$

Nun werden in die allgemeine Geradengleichung $y = mx + t$ neben der Steigung der Normalen die x- und y-Koordinaten des Punktes P eingesetzt durch welche die Normale verlaufen soll. Damit kann der y-Abschnitt t berechnet werden.

Nun kann die Gleichung der Normalen angegeben werden.

Beispiel:
Gegeben sei die Funktion $f(x) = -x^2 + 6x$. Gesucht ist die Gleichung der Normalen im Punkt $x_0 = 2$.

Berechnung der ersten Ableitung:

$$f'(x) = -2x + 6$$

Bestimmung der Tangentensteigung an der Stelle $x_0 = 2$:

$$m_{Tangente} = f'(2) = 2$$

Berechnen der Steigung der Normalen:

$$m_{Normale} = -\frac{1}{m_{Tangente}} = -\frac{1}{2}$$

Ermitteln der y-Koordinate des Punktes P:

$$y = f(2) = 8$$

Bestimmung des y-Abschnitts der Normalengleichung:

$$\begin{aligned} y &= mx + t \\ 8 &= -\frac{1}{2} \cdot 2 + t \\ t &= 9 \end{aligned}$$

Angeben der Normalengleichung:

$$y = -\frac{1}{2} \cdot x + 9$$

Übungsaufgaben:
(Jede Aufgabe auf einen eigenen Zettel drucken, einen Schüler einen Zettel ziehen lassen. Von dieser Aufgabe muss er die erste Ableitung berechnen, dann den nächsten Schüler bestimmen. Dieser darf die Gleichung der Tangente an der Stelle x_0 ermitteln und anschließend einen dritten Schüler bestimmen, der die Gleichung der Normalen an der Stelle x_0 ermitteln darf.
Graph der Funktion, Tangente und Normale mit Laptop/Beamer veranschaulichen.)

$$f(x) = 0,25x^4 - 3x^2 \qquad x_0 = 5$$

$$g(x) = 4 \cdot \frac{1}{x} \qquad x_0 = 4$$

$$h(x) = -x + \frac{1}{6 \cdot x^2} \qquad x_0 = -0,5$$

$$f(x) = x^{-2} \qquad x_0 = 0$$

$$g(x) = \sqrt{x} \qquad x_0 = -2$$

$$h(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad x_0 = 4$$

$$u(x) = \frac{1}{(\sqrt{(x)})^3} \qquad x_0 = 0,5$$

$$v(x) = 0,5x^{\frac{7}{3}} \qquad x_0 = 3$$

$$u(x) = 7k - 3 \qquad x_0 = -2$$

$$v(k) = 8x^3 - 2k \qquad k_0 = -2$$

$$s(t) = -5\frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 40\frac{m}{s} \cdot t + 10m \qquad t_0 = 2s,\ t_1 = 5s$$

Berechnung der ersten und der zweiten Ableitung!

7.8 Die physikalische Bedeutung der Ableitung

A **Zusammenhang zwischen Strecke, Geschwindigkeit und Beschleunigung**

Folgende Formel sollte aus der Physik bekannt sein (geradlinige Bewegung mit konstanter Beschleunigung):

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

Aufgabe:

Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung der Funktion $s(t)$ und überlegen Sie anhand der Einheiten welche physikalischen Größen mit diesen Ableitungen dargestellt werden.

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= s'(t) \\ &= \frac{ds(t)}{dt} \\ &= a \cdot t + v_0 \qquad \rightarrow \text{ =Geschwindigkeit} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{s}(t) &= s''(t) \\ &= v'(t) \\ &= \frac{dv(t)}{dt} \\ &= a \qquad \rightarrow \text{ =Beschleunigung} \end{aligned}$$

Gegeben sei die Weg-Zeit-Funktion $s(t) = 7\frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 11\frac{m}{s} \cdot t + 120m$ Bestimmen Sie wo sich der Körper zu den Zeitpunkten $t_1 = 2s$ und $t_2 = 10s$ befindet, welche Geschwindigkeit und welche Beschleunigung er dann jeweils hat.

$$\begin{aligned} s(t_1) &= 7\frac{m}{s^2} \cdot (2s)^2 + 11\frac{m}{s} \cdot 2s + 120m \\ &= 170m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(t_2) &= 7\frac{m}{s^2} \cdot (10s)^2 + 11\frac{m}{s} \cdot 10s + 120m \\ &= 930m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \dot{s}(t) \\ &= 14\frac{m}{s^2} \cdot t + 11\frac{m}{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(t_1) &= 14\frac{m}{s^2} \cdot 2s + 11\frac{m}{s} \\ &= 39\frac{m}{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(t_2) &= 14\frac{m}{s^2}\cdot 10s + 11\frac{m}{s} \\ &= 151\frac{m}{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(t) &= \ddot{s}(t) \\ &= \dot{v}(t) \\ &= 14\frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

$$a(t_1) = 14\frac{m}{s^2}$$

$$a(t_2) = 14\frac{m}{s^2}$$

B **Zusammenhang zwischen Kraftstoß und Impuls**

Der Impuls p wird aus der Masse eines Körpers und dessen Geschwindigkeit berechnet:

$$p = m \cdot v$$

Ändert sich der Impuls in einem bestimmten Zeitintervall so spricht man von einem Kraftstoß F:

$$F(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p(t)}{\Delta t} = \dot{p}(t)$$

Aufgabe:

Ein Schwimmer schafft es, beim Start folgenden Impuls von seinem Körper auf den Startblock zu übertragen: $p(t) = 80\,kg \cdot 0,6\frac{m}{s^2} \cdot t$ Berechnen Sie die Kraft, die er im Absprungmoment auf den Startblock bringt.

$$\begin{aligned} F(t) &= \dot{p}(t) = \frac{dp(t)}{dt} \\ &= 80\,kg \cdot 0,6\frac{m}{s^2} \\ &= 48\frac{kg\,m}{s^2} \\ &= 48N \end{aligned}$$

C **Zusammenhang zwischen Strom und Ladung**

Die elektrische Stromstärke I ist definiert als die Menge der Ladung Q, welche in einem bestimmten Zeitraum t durch den Leiter fließt.

Damit kann die Stromstärke folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} = Q'(t) = \dot{Q}(t)$$

Aufgabe:
Durch Messung wissen Sie die Menge an Ladung, die bis zu den Zeitpunkten $t_1 = 1s$, $t_2 = 5s$ und $t_3 = 20s$ durch einen elektrischen Leiter geflossen sind:

$$Q(t_1) = 7As \qquad Q(t_2) = 135As \qquad Q(t_3) = 2040As$$

Bestimmen sie die Stromstärke zu den Zeitpunkten $t_4 = 3s$ und $t_5 = 8s$.

Zunächst muss die Gleichung für $Q(t)$ aufgestellt werden. Da drei Punkte gegeben sind kann es sich maximal um eine Funktion 2.Grades handeln:

$$Q(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

Aufstellen der Gleichungen zu den gegebenen Zeitpunkten:

$$\begin{aligned} t_1: &\quad a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 = 7 \\ t_2: &\quad a_2 \cdot 5^2 + a_1 \cdot 5 + a_0 = 135 \\ t_3: &\quad a_2 \cdot 20^2 + a_1 \cdot 20 + a_0 = 2040 \end{aligned}$$

Lösen des Gleichungssystems:

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 25 & 5 & 1 & 135 \\ 400 & 20 & 1 & 2040 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -20 & -24 & -40 \\ 0 & -380 & -399 & -760 \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -20 & -24 & -40 \\ 0 & 0 & 57 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 5 \end{cases}$$

Damit lautet die Gleichung für die Ladung:

$$Q(t) = 5A \cdot t^2 + 2A \cdot t$$

Berechnung der Stromstärke:

$$\begin{aligned} I(t) &= \dot{Q}(t) \\ &= 10A \cdot t + 2A \\ \\ I(t_4) &= 32A \\ \\ I(t_5) &= 82A \end{aligned}$$

7.9 Monotonieverhalten

Von einer stetigen und differenzierbaren Funktion f sei bekannt dass die erste Ableitung positiv sei:

$$f'(x_0) > 0$$

Unter Einbeziehung der Herleitung der ersten Ableitung kann diese Aussage folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} > 0 \qquad \wedge \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0$$

Geht man davon aus dass h als sehr, sehr kleine, positive Zahl definiert wurde, so kann auf den Grenzübergang $h \to 0$ verzichtet werden. In genügend kleiner Umgebung von x_0 gelten auch folgende Zusammenhänge:

$$\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} > 0 \quad | \cdot (-h) \qquad \wedge \qquad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0 \quad | \cdot h$$

$$f(x_0-h)-f(x_0) < 0 \qquad \wedge \qquad f(x_0+h)-f(x_0) > 0$$

$$f(x_0-h) < f(x_0) \qquad \wedge \qquad f(x_0+h) > f(x_0)$$

$$f(x_0-h) < f(x_0) \qquad \wedge \qquad f(x_0) < f(x_0+h)$$

$$\to \quad f(x_0-h) < f(x_0) < f(x_0+h)$$

Interpretiert man die letzte Zeile so bedeutet dies folgendes: Je größer ein x-Wert ist ($x_0+h \quad \to \quad x_0 \quad \to \quad x_0+h$), desto größer ist auch der zugehörige Funktionswert.

Dieser Zusammenhang ist jedoch bereits aus Kapitel 2.5.3 „Monotone Funktionen“ (siehe Seite 22) bekannt. Er besagt nichts anderes als dass es sich hier um eine streng monoton steigende Funktion handelt.
Die Herleitung für eine streng monoton fallende Funktion erfolgt analog mit dem Ansatz $f'(x_0) < 0$.

Ist $f'(x_0) > 0$ (bzw. $f'(x_0) < 0$), dann ist die Funktion f bei Durchgang durch die Stelle x_0 streng monoton zunehmend (bzw. streng monoton abnehmend).

Ärgerlich ist nur, dass diese Aussage nur in unmittelbarer Umgebung von x_0 gültig ist. Wünschenswert wäre eine Aussage über den ganzen Definitionsbereich, oder wenigstens größerer Intervalle.

Dazu kann man jedoch eine weitere Eigenschaft der 1. Ableitung heranziehen. Sie entspricht ja auch der Steigung der Tangente im Punkt x_0. Da die Funktion stetig (d. h. man kann den Graph zeichnen ohne mit dem Stift abzusetzen) und differenzierbar (d. h. der Graph ist „glattgebügelt“, also ohne Knicke) ist kann sich die Steigung der Tangente im Punkt x_0 nicht allzu stark von der Steigung der Tangente im Punkt $x_0 + h$ unterscheiden.

Hat die Tangente im Punkt x_0 eine positive Steigung, so ist auch die Funktion f in unmittelbarer Umgebung von x_0 monoton steigend (analog für fallend).

Beispiel:
Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f(x) = x^3$.

→ $f'(x) = 3x^2$
→ Durch das Quadrat im Exponent ist die Ableitung stets positiv.
→ $f(x)$ ist in ganz $\mathbf{R}$ streng monoton steigend.

Was ist jedoch mit $f'(0) = 0$? Da die erste Ableitung hier den Wert Null hat ist sie sicher nicht ansteigend!
→ Da es sich hierbei nur um einen einzelnen (Terrassen)Punkt handelt (und nicht um ein Intervall) gilt die Funktion in ihrer Gesamtheit weiter als streng monoton ansteigend.

Ist die Funktion f in $[a;b]$ differenzierbar und ist $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$) für alle inneren Stellen des Intervalls, dann ist der Graph von f auf dem Intervall $[a;b]$ streng monoton steigend (bzw. fallend).

Aufgaben:

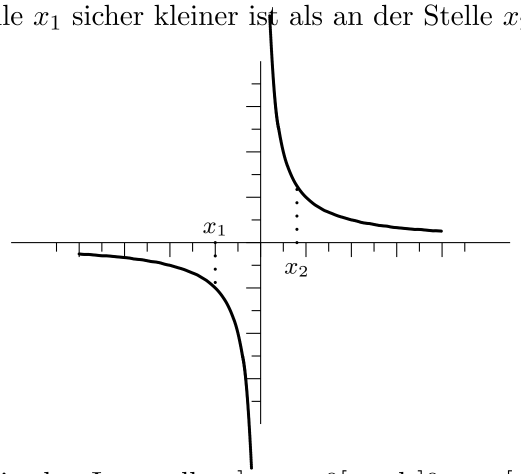
- Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auf Monotonie. → Erste Ableitung berechnen:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{R}$$

→ Der Nenner kann nur positive Werte annehmen. Unter Berücksichtigung des Minuszeichens könnte man dann sagen dass $f(x)$ in ganz $\mathbf{D}$ streng monoton abnehmend ist. Das würde aber bedeuten, dass für zwei beliebige x-Werte gilt:

$$x_1 < x_2 \qquad \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

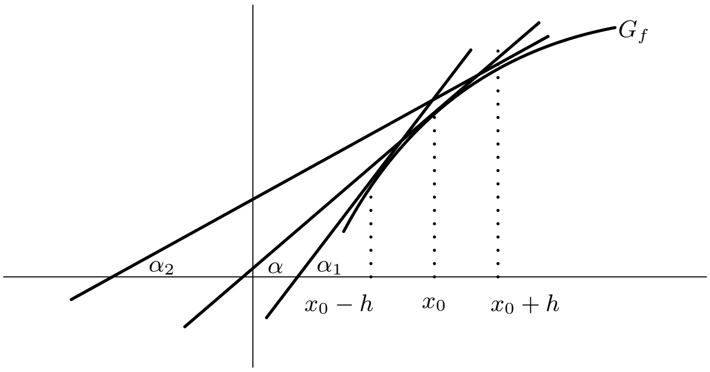
Man erkennt bereits am Graph, dass dies nicht stimmt, da der Funktionswert an der Stelle x_1 sicher kleiner ist als an der Stelle x_2:



→ $f(x)$ ist nur in den Intervallen $]-\infty;0[$ und $]0;+\infty[$ streng monoton fallend.

- Zur weiteren Übung können die Aufgaben von Seite 116 bzgl. Monotonie untersucht werden.

7.10 Krümmungsverhalten



Durchläuft man den Graph in Richtung ansteigender x-Werte, so bewegt man sich auf einer Rechtskurve. Der Graph wird deshalb *rechtsgekrümmt* oder *konvex* genannt. (Analog bezeichnet man einen Graphen der mit einer Linkskurve verläuft *linksgekrümmt* oder *konkav.*)

Wie kann dieses Verhalten mathematisch beschrieben werden?
Zunächst kann man die drei Tangenten betrachten und stellt dabei fest, dass der Winkel, den sie mit der x-Achse bilden, in Richtung größerer x-Werte zunimmt:

$$\alpha_1 > \alpha > \alpha_2$$

Für die Steigung der Tangenten gilt damit:

$$\tan\alpha_1 > \tan\alpha > \tan\alpha_2$$

oder anders ausgedrückt:

$$f'(x_0 - h) > f'(x_0) > f'(x_0 + h)$$

Die letzte Doppelungleichung beschreibt das Verhalten der Funktionswerte der ersten Ableitung f' in der Umgebung von x_0: Mit ansteigenden x-Werten nehmen die Funktionswerte ab. Das ist genau das Verhalten, welches im Kapitel 7.9 „Monotonieverhalten“ mit 'streng monoton abnehmend' bezeichnet wurde.

Da das Monotonieverhalten des Funktionsterms durch dessen 1. Ableitung beschrieben wird muss das Monotonieverhalten der ersten Ableitung eigentlich auch durch dessen 1. Ableitung beschreibbar sein. Vom Funktionsterm aus betrachtet ist die Ableitung der 1. Ableitung die 2. Ableitung f''.

Für das Krümmungsverhalten eines Graphen auf einem Intervall gilt damit:

> Der Graph einer zweimal differenzierbaren Funktion f heißt in einem offenen Intervall
>
> - rechtsgekrümmt (konvex), wenn dort $f''(x) < 0$, und
> - linksgekrümmt (konkav), wenn dort $f''(x) > 0$, gilt.

Eselsbrücke: Das „<“ erinnert an die Rechtskurve ($<$ $\approx$ $\circlearrowright$), während das „>“ mit einer Linkskurve assoziierbar ist ($>$ $\approx$ $\circlearrowleft$).

Beispiele:

- Gesucht ist das Krümmungsverhalten der Funktion $f(x) = x^3$.

  $$f'(x) = 3x^2 \qquad\qquad f''(x) = 6x$$

  $$\rightarrow f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad 6x < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0$$

  Der Graph von f ist für $x < 0$ rechtsgekrümmt.

  $$\rightarrow f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad 6x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0$$

  Der Graph von f ist für $x > 0$ linksgekrümmt.

- Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion $f(x) = -x^4 - 6x^2 - 9$.

  $$f'(x) = -4x^3 - 12x \qquad\qquad f''(x) = -12x^2 - 12 = -12(x^2 + 1)$$

  Die zweite Ableitung ist stets kleiner Null. Die Funktion ist in ganz $\mathbf{R}$ rechtsgekrümmt.

7.11 Wendepunkte

In der Praxis kommt es recht häufig vor dass ein Graph nicht durchgehend rechts- oder linksgekrümmt ist, sondern beide Krümmungen beinhaltet. Dann muss es irgendwo einen Übergang von der Rechts- in die Linkskurve (oder eben umgekehrt) geben.

Da das Krümmungsverhalten mit dem Vorzeichen der zweiten Ableitung bestimmt wurde (siehe Kapitel 7.10) kann diese auch bei der Bestimmung der Wendepunkte herangezogen werden.

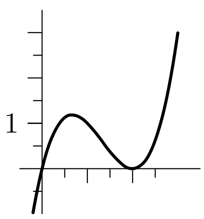
Eine innere Stelle x_w heißt Wendestelle, wenn die Werte der 2. Ableitung der Funktion $f(x)$ beim Überschreiten der Stelle x_w in Richtung ansteigender x-Werte einen Vorzeichenwechsel haben.

Ist die Funktion $f(x)$ dreimal differenzierbar, so gilt für Wendepunkte: $f''(x_w) = 0$ und $f'''(x_w) \neq 0$.

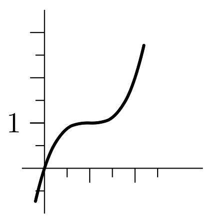
Der zugehörige Punkt wird Wendepunkt $W(x_w|f(x_w))$ genannt.

Ein Wendepunkt mit waagrechter Wendetangente heißt Terrassenpunkt oder Terrasse.

Wendepunkt



Terrassenpunkt



Beispiel:
Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = 2x^5$ auf einen Wende-/Terrassenpunkt.

1. Ableitung:
$$f'(x) = 10x^4$$

2. Ableitung:
$$f''(x) = 40x^3$$
$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x_w = 0$$

3. Ableitung:
$$f'''(x) = 120x^2$$

Dritte Ableitung ist an der Stelle $x_w = 0$ auch Null, deshalb ist eine Aussage, ob x_w eine Wendestelle der Funktion $f(x)$ ist nicht möglich.

Vorzeichenuntersuchtung der 2. Ableitung:

$$f''(0-h) = 40 \cdot (0-h)^3 = -40h^3 \quad \rightarrow \quad f''(0-h) < 0$$
$$f''(0+h) = 40 \cdot (0+h)^3 = 40h^3 \quad \rightarrow \quad f''(0-h) > 0$$

$\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel der 2. Ableitung bei $x_w = 0 \rightarrow$ Wendestelle.

Da bei $x_w = 0$ für die erste Ableitung $f(x_w) = 0$ gilt ist der Punkt $W(0|0)$ nicht nur Wende-, sondern sogar Terrassenpunkt.

7.12 Extremwerte

Ist eine Funktion nur in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definiert, so können verschiedene Arten von Extremwerten unterschieden werden:

- Es gibt *innere Stellen* des Intervalls $[a, b]$, bei denen die Funktion auf beiden Seiten dieser Stellen erklärt ist, und an den Stellen selbst einen extremalen, also größten oder kleinsten Funktionswert im Vergleich mit den benachbarten Funktionswerten einnimmt. Diese werden lokale Minima bzw. lokale Maxima genannt.
- An den Randstellen a und b der Definitionsmenge besitzt die Funktion ein Randmninimum (bzw. ein Randmaximum) falls der benachbarte Funktionswert größer (bzw. kleiner) ist. Es handelt sich hier nicht um lokale Extrema, da man sich den Randstellen stets nur von einer Seite nähern kann.

Lokale Extrema einer differenzierbaren Funktion können nur an den Stellen x vorliegen, die eine Lösung der Gleichung $f'(x) = 0$ sind.

Bedingung für lokale Extrempunkte:

Wenn die Funktion f zweimal differenzierbar ist gilt:

- $f'(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow$ lokaler Hochpunkt $H(x_0|f(x_0))$.
- $f'(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow$ lokaler Tiefpunkt $T(x_0|f(x_0))$.

Leider sind diese Bedingungen nur hinreichend, nicht jedoch notwändig. D. h. man kann die Aussage nicht umkehren! Das zeigt auch das Beispiel $f(x) = -x^4$.
$\rightarrow$ Erste Ableitung: $f'(x) = -4x^3 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 0$ bei $x_0 = 0$
$\rightarrow$ Zweite Ableitung: $f''(x) = -12x^2 \quad \rightarrow \quad f''(x) = 0$ bei $x_0 = 0$
$\rightarrow$ ABER: Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = 0$ eindeutig ein lokales Maximum!

Die Bedingung mit $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$ ist als Nachweis für ein lokales Maximum anscheinend nicht optimal geeignet. Deshalb wurde nach einer weiteren Möglichkeit gesucht. Eine hinreichende und auch notwändige Bedingung für ein lokales Extrema lautet:

Ist $f'(x_0) = 0$ und wechseln die Ableitungswerte $f'(x)$ beim Überschreiten der Stelle x_0 in Richtung ansteigender x-Werte von ...

- ... positiven zu negativen Werten $\Rightarrow$ lokaler Hochpunkt $H(x_0|f(x_0))$.
- ... negativen zu positiven Werten $\Rightarrow$ lokaler Tiefpunkt $T(x_0|f(x_0))$.

Der Nachweis lokaler Extrema gelingt am einfachsten mit Hilfe einer Monotonietabelle. Vorgehen am Beispiel $f(x) = -x^4$:

1. Berechnung der ersten Ableitung: $f'(x) = -4x^3$.
2. Bestimmung aller Nullstellen der ersten Ableitung: $x_{N1} = 0$.
3. Aufstellen der Monotonietabelle

Teilintervalle bzw. Nullstellen	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
Vorzeichen von $f'(x)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$
Monotonie von G_f	streng monoton steigend $\nearrow$	—	streng monoton fallend $\searrow$

7.13 Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 1:
Gegeben seien die folgenden Punkte:

$$A(-2|-14) \qquad B(1|1,75) \qquad C(2|-2) \qquad D(4|4)$$

1. Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$ so, dass die gegebenen Punkte auf dem Graphen liegen.
2. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f(x)$.
3. Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion $f(x)$.
4. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graph von $f(x)$ bei $x_0 = 3$.
5. Geben Sie die Gleichung der Normalen an den Graph von $f(x)$ bei $x_0 = \frac{2}{3}$ an.
6. Bestimmen Sie die Stellen, an denen die Tangente die Steigung Null hat. Geben Sie von diesen Stellen die Koordinaten an. Beschreiben Sie was das Besondere an diesen Punkten ist.
7. Weisen Sie alle lokalen Extrema nach.
8. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ unter Zuhilfenahme der Ergebnisser aller vorsausgegangener Teilaufgaben.

Lösung:

1. Es sind vier Punkte gegeben. Somit können vier Unbekannte berechnet werden. Es soll also eine Funktion dritten Grades gefunden werden, welche die gegebenen Punkte enthält.
   $\rightarrow$ Aufstellen und lösen eines Gleichungssystems.

$$\begin{array}{rrrr|r} -8 & 4 & -2 & 1 & -14 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1,75 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 4 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1,75 \\ -8 & 4 & -2 & 1 & -14 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 4 \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1,75 \\ 0 & 12 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & -16 \\ 0 & -48 & -60 & -63 & -108 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1,75 \\ 0 & 12 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & -36 & -27 & -108 \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1,75 \\ 0 & 12 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 36 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_0 = 4 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = -3 \\ a_3 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

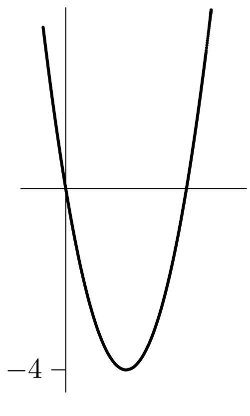
   Damit lautet die Gleichung der gesuchten Funktion:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{3}{4} \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 4}}$$

2. Das Monotonieverhalten wird mit der ersten Ableitung untersucht:

$$f'(x) = \frac{9}{4} \cdot x^2 - 6 \cdot x = x \cdot \left(\frac{9}{4} \cdot x - 6 \right)$$

   Entweder man überlegt sich, dass die erste Ableitung die Funktion einer nach oben geöffneten Parabel mit Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{8}{3}$ ist, *oder* man führt eine Vorzeichenuntersuchung (VZU) durch:



VZU				0					$\frac{8}{3}$			
x	−	−	−	()	+	+	+	+	+	+	+	+
$\frac{9}{4}x - 6$	−	−	−	−	−	−	−	−	()	+	+	+
$f'(x)$	+	+	+	()	−	−	−	−	()	+	+	+

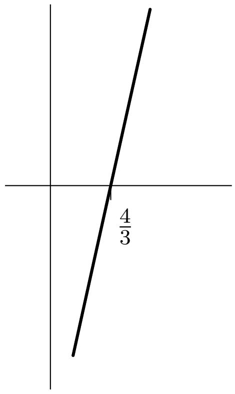
   $\rightarrow$ Anhand beider Vorgehensweisen erkennt man, dass die Funktionswerte der ersten Ableitung für $x < 0$ und $x > \frac{8}{3}$ positiv, im Intervall $]0; \frac{8}{3}[$ jedoch

negativ sind. Das bedeutet:
Der Graph der Funktion $f(x)$ ist in den Intervallen $]-\infty;0[$ und $]\frac{8}{3};+\infty[$ streng monoton steigend, in $]0;\frac{8}{3}[$ streng monoton fallend.

3. Um das Krümmungsverhalten zu untersuchen wird die zweite Ableitung benötigt:

$$f''(x) = \frac{9}{2} \cdot x - 6$$

Entweder man überlegt sich, dass der Graph der zweiten Ableitung eine ansteigende Gerade mit der Nullstelle bei $x_3 = \frac{4}{3}$ ist, oder man untersucht die Gleichung bzgl. ihres Vorzeichens mit Hilfe von Ungleichungen:



Linkskrümmung	Rechtskrümmung
$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$
$\frac{9}{2}x - 6 > 0$	$\frac{9}{2}x - 6 < 0$
$\frac{9}{2}x > 6$	$\frac{9}{2}x < 6$
$x > \frac{4}{3}$	$x < \frac{4}{3}$

$\rightarrow$ Da $f''(x)$ für $x < \frac{4}{3}$ kleiner Null, ist $f(x)$ für $x < \frac{4}{3}$ rechtsgekrümmt. Und da $f''(x)$ größer Null für $x > \frac{4}{3}$ ist der Graph der Funktion $f(x)$ in diesem Bereich linksgekrümmt.

4. Koordinaten des Punktes P_1 bei $x_0 = 3$ ermitteln.

$$\begin{aligned} & f(3) = -2,75 \\ \rightarrow \quad & P_1(3|-2,75) \end{aligned}$$

Steigung in x_0 berechnen:

$$f'(3) = 2,25$$

y-Abschnitt der Tangenten bestimmen:

$$\begin{aligned} y &= m \cdot x + t \\ -2,75 &= 2,25 \cdot 3 + t \\ t &= -9,5 \end{aligned}$$

Tangentengleichung in P_1 angeben:

$$\underline{\underline{y = 2,25 \cdot x - 9,5}}$$

5. Um die Gleichung der Normalen anzugeben muss zunächst die Steigung der Tangente an Graph bei $x_0 = \frac{2}{3}$ bestimmt werden.
Koordinaten des Punktes bei $x_0 = \frac{2}{3}$ ermitteln.

$$\begin{array}{rl} & f(\frac{2}{3}) = \frac{26}{9} \\ \rightarrow & P_2(\frac{2}{3}|\frac{26}{9}) \end{array}$$

Steigung der Tangente in x_0 berechnen:

$$f'(\frac{2}{3}) = -3$$

Steigung der Normalen angeben:

$$m_{Normale} = -\frac{1}{m_{Tangente}} = \frac{1}{3}$$

y-Abschnitt der Normalen bestimmen:

$$\begin{array}{rcl} y & = & m \cdot x + t \\ \frac{26}{9} & = & \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + t \\ t & = & \frac{24}{9} \end{array}$$

Normalengleichung in P_2 angeben:

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{24}{9}}}$$

6. Aus der Teilaufgabe 2 ist die erste Ableitung und deren Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{8}{3}$ bereits bekannt.

$$f(0) = 4 \qquad \rightarrow \qquad P_3(0|4)$$

$$f(\frac{8}{3}) = -\frac{28}{9} \qquad \rightarrow \qquad P_4(\frac{8}{3}|-\frac{28}{9})$$

Diese Punkte haben selbst keine Steigung. Interessant ist jedoch, dass genau in diesen Punkten die Steigung ihr Vorzeichen ändert (beispielsweise verläuft der Graph links von $x_1 = 0$ ansteigend, rechts davon fällt er jedoch ab). Das bedeutet jedoch, dass diese Punkte in der näheren Umgebung den höchsten bzw. tiefsten Punkt darstellen.

7. Die erste Ableitung mit ihren Nullstellen ist aus Teilaufgabe 2 bekannt.

$$f'(x) = \frac{9}{4} \cdot x^2 - 6 \cdot x = x \cdot \left(\frac{9}{4} \cdot x - 6\right)$$

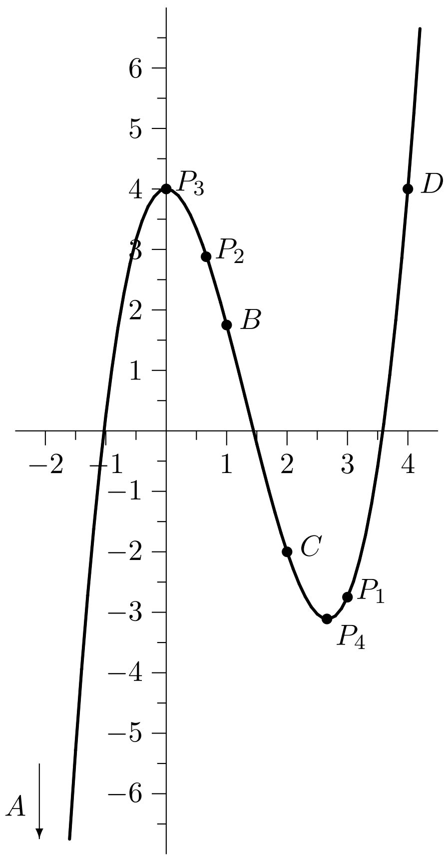
$$x_{N1} = 0 \qquad x_{N2} = \frac{8}{3}$$

Aufstellen der Monotonietabelle:

	$x < 0$	$x = 0$	$0 > x < \frac{8}{3}$	$x = \frac{8}{3}$	$x > \frac{8}{3}$
Vorzeichen von $f'(x)$	+		−		+
Monotonie	↗	—	↘	—	↗

8. Es sind folgende Eigenschaften des Graphen bekannt:

   - Die Koordinaten der vier Punkte $A(-2|-14)$, $B(1|1,75)$, $C(2|-2)$ und $D(4|4)$.
   - Der Graph verläuft links von $x = 0$ und rechts von $x = \frac{8}{3}$ streng monoton steigend, dazwischen streng monoton fallend.
   - Der Graph beschreibt links von $x = \frac{4}{3}$ eine Rechtskurve, ist also konvex, rechts von $x = \frac{4}{3}$ eine Linkskurve, und ist damit konkav.
   - Die Koordinaten der Punkte $P_1(3|-2,75)$, $P_2(\frac{2}{3}|\frac{26}{9})$, $P_3(0|4)$ und $P_4(\frac{8}{3}|-\frac{28}{9})$.



Übungsaufgabe 2:

Das statistische Bundesamt untersucht jedes Jahr die Preisentwicklung für einen so genannten Warenkorb. Als Bezugsgröße wurde das Jahr 2000 mit 100 Punkten festgesetzt. Die Daten folgender Jahre sind bekannt:

Jahr	Verbraucherpreisindex
1991	$81,9$
1997	$97,1$
2003	$104,5$

1. Bestimmen Sie eine mathematische Funktion, welche die Entwicklung des Verbraucherpreisindex möglichst genau beschreibt.
2. Untersuchen Sie, ob sich der Anstieg des Verbraucherpreisindex von 1991 bis 2003 verlangsamt, immer weiter steigert oder ob er konstant bleibt.
3. Um wieviel Punkte stiegen die Verbraucherpreise durchschnittlich von 1991 bis 1997 bzw. von 1997 bis 2003?
4. Wie hoch war die Steigerung des Preisindex in den Jahren 1994 und 2000?
5. Begründen Sie ob der Preisindex immer weiter ansteigen, oder evtl. auch einmal fallen wird. Falls der Index einmal fällt geben Sie an
   - welchen Höchststand er bis dahin erreicht hat und
   - in welchem Jahr diese Trendwende zu erwarten wäre.
6. Fertigen Sie zwei Skizzen an:
   - Grober Verlauf des Preisindex von $-1500 < x < 4000$
   - Ausschnittsvergrößerung für die Jahre 1991 bis 2003.
7. In nachfolgender Tabelle finden Sie die realen Indizes für die Jahre 1991 bis 2003. Übertragen Sie auch diese Werte in die eben angefertigte Skizze (Ausschnittsvergrößerung) und vergleichen Sie die berechneten mit den realen Daten.
   Überlegen Sie, warum die berechneten Werte nicht mit der Realität übereinstimmen?

Jahr	Verbraucherpreisindex
1991	$81,9$
1992	$86,1$
1993	$89,9$
1994	$92,3$
1995	$93,9$
1996	$95,3$
1997	$97,1$

Jahr	Verbraucherpreisindex
1998	$98,0$
1999	$98,6$
2000	100
2001	$100,2$
2002	$103,4$
2003	$104,5$

Quelle: Online Datenbank des statistischen Bundesamtes, Wiesbaden, Stand: 10.04.2004

Lösung:

1. Es sind vier (!) Werte bekannt: die in der Tabelle gegebenen und der Bezugswert aus dem Jahr 2000. Damit kann eine Funktion dritten Grades aufgestellt werden:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = y$$

→ Aufstellen eines Gleichungssystems:

$$\begin{array}{lllll}
a_3 \cdot 1991^3 & +a_2 \cdot 1991^2 & +a_1 \cdot 1991 & +a_0 & = 81,9 \\
a_3 \cdot 1997^3 & +a_2 \cdot 1997^2 & +a_1 \cdot 1997 & +a_0 & = 97,1 \\
a_3 \cdot 2000^3 & +a_2 \cdot 2000^2 & +a_1 \cdot 2000 & +a_0 & = 100 \\
a_3 \cdot 2003^3 & +a_2 \cdot 2003^2 & +a_1 \cdot 2003 & +a_0 & = 104,5
\end{array}$$

→ Lösen des Gleichungssystems:

$$\left.\begin{array}{rrrr|r}
7,89 \cdot 10^9 & 3964081 & 1991 & 1 & 81,9 \\
7,96 \cdot 10^9 & 3988009 & 1997 & 1 & 97,1 \\
8 \cdot 10^9 & 4000000 & 2000 & 1 & 100 \\
8,04 \cdot 10^9 & 4012009 & 2003 & 1 & 104,5
\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rrrr|r}
7,89 \cdot 10^9 & 3964081 & 1991 & 1 & 81,9 \\
0 & -11352,3 & 11,72 & -0,0089 & 14,47 \\
0 & -19181,7 & -18,67 & -0,0139 & 16,96 \\
0 & -27389,5 & -25,83 & -0,019 & 21,04
\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rrrr|r}
7,89 \cdot 10^9 & 3964081 & 1991 & 1 & 81,9 \\
0 & -11352,3 & 11,72 & -0,0089 & 14,47 \\
0 & 0 & -38,47 & 0,0011 & -7,489 \\
0 & 0 & -54,11 & 0,0025 & -13,88
\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rrrr|r}
7,89 \cdot 10^9 & 3964081 & 1991 & 1 & 81,9 \\
0 & -11352,3 & 11,72 & -0,0089 & 14,47 \\
0 & 0 & -38,47 & 0,0011 & -7,489 \\
0 & 0 & 0 & 0,0009 & -3,35
\end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = & -3722,22 \\ a_1 = & 0,088 \\ a_2 = & 0,0017 \\ a_3 = & -3,94 \cdot 10^{-7} \end{cases}$$

Damit lautet die Gleichung der gesuchten Funktion:

$$\underline{\underline{f(x) = -3,94 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 + 0,0017 \cdot x^2 + 0,088 \cdot x - 3722,22}}$$

2. Erfolgt der Anstieg des Verbraucherpreisindex immer schneller, so muss sein Graph eine Linkskurve beschreiben, wird die Zunahme des Index jedoch gedämpf, so verläuft der Graph rechtsgekrümmt. Nur bei einer kontinuierlichen Steigerung wäre der Graph eine Gerade.

   → Untersuchung des Krümmungsverhaltens mit Hilfe der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= -3,94 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 + 0,0017 \cdot x^2 + 0,088 \cdot x - 3722,22 \\ f'(x) &= -1,182 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 0,0034 \cdot x + 0,088 \\ f''(x) &= -2,364 \cdot 10^{-6} \cdot x + 0,0034 \end{aligned}$$

   Man erkennt, dass für alle x-Werte $1991 \leq x \leq 2003$ die Funktionswerte der zweiten Ableitung negativ sind. Das bedeutet der Graph des Verbraucherpreisindex ist in diesem Zeitraum rechtsgekrümmt (konvex). Der Anstieg der Verbraucherpreise erfolgt also immer langsamer!

3. Um eine durchschnittliche Steigung auszurechnen wird <u>keine</u> Ableitung benötigt!

$$m_{\varnothing 1} = \tfrac{97,1-81,9}{1997-1991} \qquad m_{\varnothing 2} = \tfrac{104,5-97,1}{2003-1997}$$

$$m_{\varnothing 1} = 2,53 \qquad m_{\varnothing 2} = 1,23$$

4. Es soll die lokale Änderungsrate bestimmt werden. Diese wird durch die erste Ableitung (siehe Teilaufgabe 2) ausgedrückt.

$$\begin{aligned} m_{1994} &= f'(1994) \qquad & m_{2000} &= f'(2000) \\ m_{1994} &= 2,1679 \qquad & m_{2000} &= 2,16 \end{aligned}$$

5. Es muss untersucht werden ob, und gegebenenfalls ab wann, die Steigung des Graphen negativ wird.

$$\begin{aligned} 0 &> f'(x) \\ 0 &> -1,182 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 0,0034 \cdot x + 0,088 \end{aligned}$$

Da der Funktionsterm der ersten Ableitung eine Funktion zweiten Grades ist, wird das Problem zunächst in eine quadratische Gleichung umgeformt und diese mit der Lösungsformel gelöst.

$$\begin{aligned} 0 &= -1,182 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 0,0034 \cdot x + 0,088 \\ \rightarrow x_{1/2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_{1/2} &= \frac{-0,0034 \pm \sqrt{0,0034^2 - 4 \cdot (-1,182 \cdot 10^{-6}) \cdot 0,088}}{2 \cdot (-1,182 \cdot 10^{-6}} \\ x_{1/2} &= \frac{-0,0034 \pm \sqrt{1,1976 \cdot 10^{-5}}}{-2,364 \cdot 10^{-6}} \\ x_{1/2} &= \frac{-0,0034 \pm 3,4606 \cdot 10^{-3}}{-2,364 \cdot 10^{-6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow x_1 &\approx -25 \\ x_2 &\approx 2902 \end{aligned}$$

Die erste Lösung $x_1 \approx -25$ ist zwar mathematisch richtig, aber natürlich keine sinnvolle Lösung für das vorliegende Problem.

Im Jahr 2902 wird der Preisindex nicht steigen, da $f'(2902) \approx 0$.
Für alle späteren Jahre sind die Funktionswerte der ersten Ableitung negativ (z. B. $f'(2903) \approx -0,003$). D. h. der Preisindex fällt.

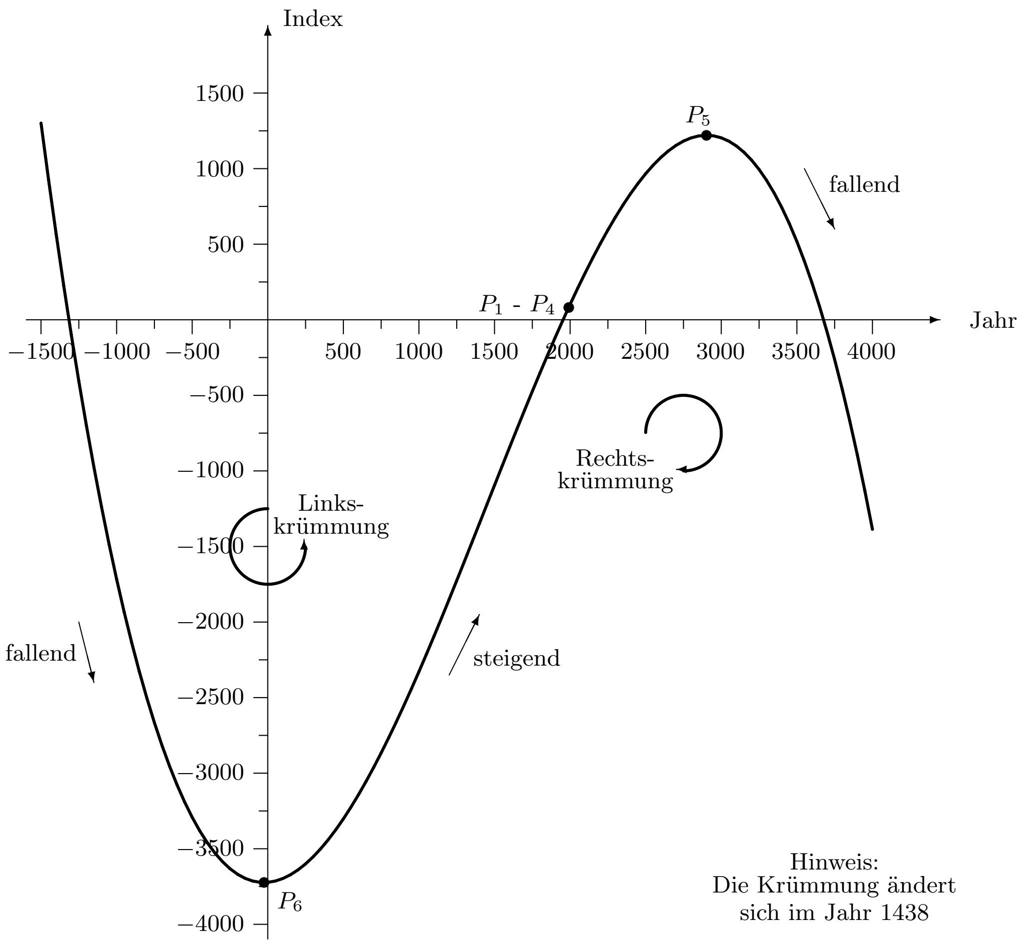
Um den Höchststand zu ermitteln muss nur die Jahreszahl in die Funktionsgleichung eingesetzt werden:

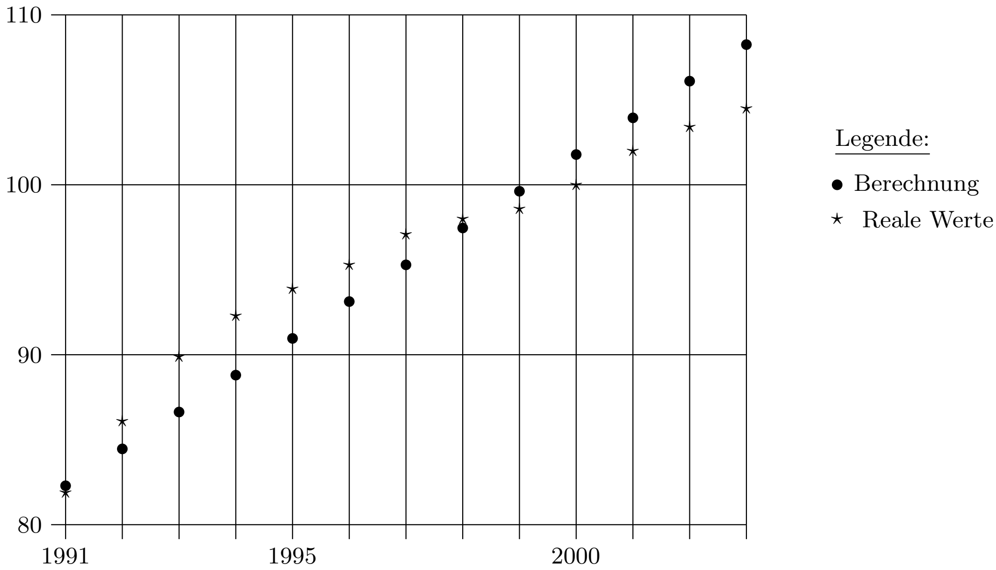
$$\underline{\underline{f(2902) \approx 1220,72}}$$

Anmerkung: Im Jahr -25 hätte der Index einen Tiefststand von $f(-25) \approx -3723,35$ gehabt.

6. Folgende Eigenschaften des Graphen sind bekannt:

   - Die Punkte $P_1(1991|81,9)$, $P_2(1997|97,1)$, $P_3(2000|100)$ und $P_4(2003|104,5)$.
   - In den Jahren 1991 bis 2003 steigt der Graph und ist rechtsgekrümmt.
   - In den Jahren -25 und 2902 hat der Graph keine Steigung (waagrechte Tangente). Daher sind die Punkte $P_5(2902|1220,7)$ und $P_6(-25|-3723,4)$ bekannt.
   - Ab dem Jahr 2902 fällt der Graph.





7. Die errechnete Funktion für den Verbraucherpreisindex ist eine Funktion dritten Grades. Betrachtet man die Funktion dritten Grades jedoch nur für den Bereich 1991 bis 2003, so erscheint dieser Ausschnitt wie eine Gerade. Die eigentlich vorhandene Krümmung ist nicht mehr erkennbar.
   Die Realität wird durch die aufgestellte Funktion einfach zu ungenau abgebildet. Insbesondere falls genauere Prognosen für die kommenden Jahre abgegeben werden sollen muss dieses mathematische Modell verfeinert werden.
   Dies könnte erreicht werden wenn mit Hilfe aller bekannten Daten aus den Jahren 1991 bis 2003 ein Gleichungssystem aufgestellt und damit eine Funktion vom Grad 12 berechnet würde. Man erkennt jedoch auch, dass der Aufwand für eine Präzisierung der Vorhersagen beträchtlich wird!

Übungsaufgaben (Teil 3):
Geben Sie den Term einer Funktion mit den geforderten Eigenschaften an.

1. Hochpunkt bei $x_1 = -2$ und Tiefpunkt bei $x_2 = 3$.
2. Rechtsgekrümmt für $x < -1$, Punkt $P(2|6)$ liegt auf dem Graphen.
3. Terrassenpunkt bei $T(4|-1)$
4. Tiefpunkte bei $x_1 = 2$ und $x_2 = 8$
5. Graph verläuft im Intervall $]-\infty; -6[$ streng monoton steigend und weist bei $x = 3$ eine Linkskrümmung auf.
6. Tiefpunkt bei $x_1 = -1$ und Hochpunkt bei $x_2 = 4$.
7. Hochpunkt bei $P(-7|2)$.

Lösung (Teil 3):

1. Bedingungen:

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0$$
$$f''(x_1) < 0 \qquad \wedge \qquad f''(x_2) > 0$$

Möglicher Ansatz über die 1. Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+2)\cdot(x-3) \\ &= x^2 - x - 6 \end{aligned}$$

Prüfung, ob damit auch die Bedingung der 2. Ableitung erfüllt wird:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2x - 1 \\ \rightarrow \quad f''(x_1) &= 2\cdot(-2) - 1 = -5 \quad < 0 \quad \checkmark \\ \rightarrow \quad f''(x_2) &= 2\cdot 3 - 1 = 5 \quad > 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Alle Bedingungen sind erfüllt. Damit lautet ein möglicher Funktionsterm:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{1}{2}\cdot x^2 - 6\cdot x}}$$

2. Bedingungen:
$$f''(x<-1)<0 \qquad \wedge \qquad f(2)=6$$
Möglicher Ansatz über die 2. Ableitung:
$$\begin{aligned} f''(x) &= x \\ \rightarrow \quad f'(x) &= \frac{1}{2}\cdot x^2 + a \\ \rightarrow \quad f(x) &= \frac{1}{6}\cdot x^3 + a\cdot x + b \end{aligned}$$
Zweite Bedingung wird berücksichtigt:
$$\begin{aligned} f(2) &= 6 \\ \frac{1}{6}\cdot x^3 + a\cdot x + b &= 6 \\ \frac{4}{3} + 2a + b &= 6 \\ b &= \frac{14}{3} - 2a \end{aligned}$$
Alle Forderungen an den Funktionsterm sind berücksichtigt. Somit lautet dieser:
$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{6}\cdot x^3 + a\cdot x + \frac{14}{3} - 2a}}$$

3. Bedingungen:
$$f'(4)=0 \qquad \wedge \qquad f''(4)=0$$
Ansatz über 2. Ableitung:
$$f''(x) = x-4$$
$\rightarrow$ 1. Ableitung ermitteln:
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + a$$
$$\begin{aligned} f'(4) &= 0 \qquad \text{(Bedingung!)} \\ \frac{1}{2}\cdot 4^2 - 4\cdot 4 + a &= 0 \\ 8-16+a &= 0 \\ a &= 8 \\ \rightarrow f'(x) &= \frac{1}{2}\cdot x^2 - 4\cdot x + 8 \end{aligned}$$

Funktionsterm bestimmen:

$$f(x) = \frac{1}{6} \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 8 \cdot x + b$$

$$\begin{aligned}
f(4) &= -1 \qquad \text{(Bedingung!)} \\
\frac{1}{6} \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 8 \cdot x + b &= -1 \\
\frac{32}{3} - 32 + 32 + b &= -1 \\
b &= -\frac{35}{3}
\end{aligned}$$

Alle Bedingungen sind berücksichtigt, damit lautet der Funktionsterm:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{6} \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 8 \cdot x - \frac{35}{3}}}$$

4. Bedingungen:

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0$$

$$f''(x_1) > 0 \qquad \wedge \qquad f''(x_2) > 0$$

Da $x_1 = 2$ und $x_2 = 8$ bereits positiv sind lautet der einfachste Ansatz mit der zweiten Ableitung:

$$f''(x) = x$$

Damit erhält man die folgende 1. Ableitung:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + a$$

Mit der ersten Bedingung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
f'(x_1) = 0 \quad &\wedge \quad f'(x_2) = 0 \\
f'(x_1) &= f'(x_2) \\
\frac{1}{2} \cdot 2^2 + a &= \frac{1}{2} \cdot 8^2 + a \\
2 &= 32 \qquad \text{Widerspruch!!}
\end{aligned}$$

Neuer Ansatz: Zu etwas positivem darf etwas dazugezählt werden. Es bleibt positiv.

$$f''(x) = x + a \qquad \spadesuit$$

Damit bekommt man folgende (vorläufige) 1. Ableitung:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + ax + b$$

Mit der ersten Bedingung ergibt sich:

$$\begin{aligned} f'(x_1) = 0 \quad &\wedge \quad f'(x_2) = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 2^2 + a \cdot 2 + b &= \frac{1}{2} \cdot 8^2 + a \cdot 8 + b \\ 2 + 2a + b &= 32 + 8a + b \\ 6a + 30 &= 0 \\ a &= -5 \qquad \clubsuit \end{aligned}$$

Damit lässt sich die 1. Ableitung folgendermaßen konkretisieren:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 5 \cdot x + b$$

Berücksichtigt man nun noch dass die erste Ableitung bei x_1 und x_2 nicht nur den gleichen Wert, sondern genau den Wert Null haben soll, so erhält man:

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= 0 \\ \tfrac{1}{2} \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + b &= 0 \\ 2 - 10 + b &= 0 \\ b &= 8 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f'(x_2) &= 0 \\ \tfrac{1}{2} \cdot 8^2 - 5 \cdot 8 + b &= 0 \\ 32 - 40 + b &= 0 \\ b &= 8 \end{aligned}$$

Damit erhält man die 1. Ableitung zu:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 5x + 8$$

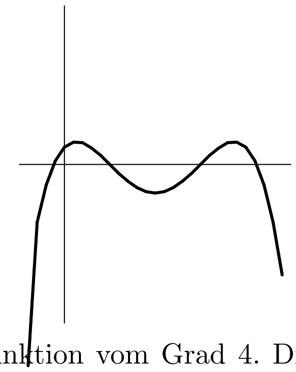
Alle Bedingungen sind berücksichtigt, womit man einen möglichen Funktionsterm angeben kann:

$$f(x) = \frac{1}{6} \cdot x^3 - \frac{5}{2} \cdot x^2 + 8 \cdot x + c$$

Zeichnet man den Graph so erkennt man, dass bei x_1 und x_2 zwar Extrema liegen, jedoch nur bei $x_1 = 2$ ein Hochpunkt, während sich bei $x_2 = 8$ ein Tiefpunkt befindet.
Der Grund liegt in der Berechnung des Parameters a. An der mit $\spadesuit$ gekennzeichneten Stelle wurde vergessen zu definieren dass a größer als -2 sein muss damit die zweite Ableitung für x_1 und x_2 größer Null bleibt. Hätte man die Definitionsmenge richtig angegeben wäre man bereits bei $\clubsuit$ auf den Widerspruch gestoßen.

Neuer Ansatz: Da der Graph zwei Hochpunkte haben soll muss dazwischen ein lokaler Tiefpunkt liegen. Frei skizziert wird der Graph folgende

Form haben:



Dies entspricht einer Funktion vom Grad 4. Die zweite Ableitung muss also vom Grad zwei sein.

Erneuter Ansatz mit einer 2. Ableitung vom Grad 2:

$$f''(x) = x^2 + ax + b$$

Dies ist der Graph einer nach oben geöffneten Parabel. Nach den eingangs aufgestellten Bedingungen soll die zweite Ableitung für $x_1 = 2$ und $x_2 = 8$ größer Null sein. Es bietet sich also an zunächst die Nullstellen der Parabel zu berechnen.

$$\left.\begin{array}{lclcr} f''(2) = 0 & \rightarrow & 2^2 + 2 \cdot a + b = 0 & \rightarrow & 4 + 2 \cdot a + b = 0 \\ f''(8) = 0 & \rightarrow & 8^2 + 8 \cdot a + b = 0 & \rightarrow & 64 + 8 \cdot a + b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad a = -10$$

Um sicherzustellen dass die zweite Ableitung auch wirklich positiv ist wird nun noch der Wert des Parameters b bestimmt.

$$\left.\begin{array}{lclcr} f''(2) > 0 & \rightarrow & 2^2 + 2 \cdot (-10) + b > 0 & \rightarrow & 4 - 20 + b > 0 \\ f''(8) > 0 & \rightarrow & 8^2 + 8 \cdot (-10) + b > 0 & \rightarrow & 64 - 80 + b > 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad b > 16$$

Somit lautet die zweite Ableitung:

$$f''(x) = x^2 - 10 \cdot x + b \qquad\qquad b > 16$$

Nun kann die erste Ableitung ermittelt werden:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + bx + c$$

Mit der Bedingung für die erste Ableitung gilt:

$$\left.\begin{array}{lclcr} f'(2) = 0 & \rightarrow & \frac{1}{3}2^3 - 5 \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 0 & \rightarrow & -\frac{52}{3} + 2b + c = 0 \\ f'(8) = 0 & \rightarrow & \frac{1}{3}8^3 - 5 \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c = 0 & \rightarrow & -\frac{448}{3} + 8b + c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} b = 22 \\ c = -\frac{80}{3} \end{array}\right.$$

Damit kann man die vollständige erste Ableitung angeben:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 22 \cdot x - \frac{80}{3}$$

Ausgehend von der ersten Ableitung bekommt man direkt den Funktionsterm:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{12} \cdot x^4 - \frac{5}{3} \cdot x^3 + 11 \cdot x^2 - \frac{80}{3} \cdot x + d}}$$

5. Bedingungen:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\quad \text{für} \quad x \in]-\infty; -6[\\ f''(x) > 0 &\quad \text{bei} \quad x = 3 \end{aligned}$$

Einfachster Ansatz (damit die Funktion den kleinstmöglichen Grad hat):

$$f''(x) = a \qquad\qquad a > 0$$

Damit lautet die erste Ableitung:

$$f'(x) = ax + b$$

Leider ist mit dieser ersten Ableitung die oben formulierte Bedingung $f'(x) > 0$ nicht sicher erfüllbar. Egal wie hoch der Parameter a gewählt wird und welchen Wert man für x einsetzt: man findet immer ein b so, dass die erste Ableitung negativ wird.

Neuer Ansatz:

$$f''(x) = x + a \qquad\qquad a > -3$$

Damit erhält man die erste Ableitung:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + a \cdot x + b$$

Dies ist eine nach oben geöffnete Parabel. Da der Graph der Funktion für alle Werte $x < -6$ steigen soll, muss die erste Ableitung dort positiv sein und für größere x-Werte negativ. Bei $x = 0$ hat die erste Ableitung also eine Nullstelle:

$$\begin{aligned} f'(-6) &= 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (-6)^2 + a \cdot (-6) + b &= 0 \\ 18 - 6 \cdot a + b &= 0 \\ b &= 6a - 18 \end{aligned}$$

Somit lautet die (vorläufige) erste Ableitung:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + a \cdot x + 6a - 18$$

Diese erste Ableitung soll für alle Werte kleiner als -6 positiv sein. Man sucht sich einfach einen passenden x-Wert (z. B. $x = -10$) aus und erhält:

$$\begin{aligned} f'(-10) &> 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (-10)^2 + a \cdot (-10) + 6a - 18 &> 0 \\ 50 - 10 \cdot a + 6a - 18 &> 0 \\ 32 - 4 \cdot a &> 0 \\ a &> -8 \end{aligned}$$

Ein Funktionsterm mit den gewünschten Eigenschaften lautet damit:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{a}{2} \cdot x^2 + (6a - 18) \cdot x + b \qquad \text{mit:} \quad a > -8}}$$

6. Bedingungen:

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0$$
$$f''(x_1) > 0 \qquad \wedge \qquad f''(x_2) < 0$$

Ansatz über die erste Ableitung:

$$f'(x) = (x + 1) \cdot (x - 4) = x^2 - 3x - 4$$

Überprüfen des Ansatzes mit den Bedingungen der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2x - 3 \\ f''(x_1) &= 2 \cdot (-1) - 3 = -5 && < 0 && \wr \text{ Widerspruch zu Bedingung!} \\ f''(x_2) &= 2 \cdot 4 - 3 = 5 && > 0 && \wr \text{ Widerspruch zu Bedingung!} \end{aligned}$$

Anschauliche Erklärung: Der Graph der ersten Ableitung ist eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 4$.
Links von der linken Nullstelle muss der Graph demnach fallen, rechts von der rechten Nullstellen muss er steigen. Das ist der Bedingung aus der zweiten Ableitung jedoch genau entgegen gerichtet.
Abhilfe kann man schaffen indem der Graph an der x-Achse gespiegelt wird - dies entspricht einer Multiplikation des Funktionsterms mit -1:

$$f'(x) = -x^2 + 5x + 4$$

Überprüfen dieses Ansatzes mit den Bedingungen der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2x + 3 \\ f''(x_1) &= -2 \cdot (-1) + 3 = 5 && < 0 && \checkmark \\ f''(x_2) &= -2 \cdot 4 + 3 = -5 && > 0 && \checkmark \end{aligned}$$

Damit kann der Funktionsterm angegeben werden:

$$\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2 + 4 \cdot x + a}}$$

7. Da laut Aufgabenstellung ein beliebiger Funktionsterm gesucht ist der diese Eigenschaft aufweist kann man eine Lösung durch Überlegen angeben:
   Besitzt die Funktion nur einen Hochpunkt muss es sich um eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel als Hochpunkt handeln.
   Damit lautet ein Funktionsterm:

$$\underline{\underline{f(x) = -(x+7)^2 + 2 = -x^2 - 14x - 47}}$$

Die aufwändigere (dafür allgemeinere) Lösung:
Bedingungen:

$$f'(-7) = 0 \qquad \wedge \qquad f''(-7) < 0$$

Der einfachste Ansatz zur Erfüllung der Bedingung der zweiten Ableitung lautet:

$$f''(x) = a \qquad \text{mit: } a < 0$$

Damit kann die erste Ableitung ermittelt werden:

$$f'(x) = ax + b$$

$$\begin{aligned} f'(-7) &= 0 \\ a \cdot (-7) + b &= 0 \\ b &= 7 \cdot a \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad f'(x) = a \cdot x + 7 \cdot a$$

Damit kann man den (vorläufigen) Funktionsterm angeben:

$$f(x) = \frac{a}{2} \cdot x^2 + 7a \cdot x + c$$

$$\begin{aligned} f(-7) &= 2 \\ \frac{a}{2} \cdot (-7)^2 + 7a \cdot (-7) + c &= 2 \\ 24,5a - 49a + c &= 2 \\ c &= 2 + 24,5a \end{aligned}$$

Damit lautet der gesuchte Funktionsterm:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{a}{2} \cdot x^2 + 7a \cdot x + 2 + 24,5a \qquad \text{mit: } a < 0}}$$

Übungsaufgaben (Teil 4):

1. Gegeben sei die Funktion $x \mapsto f(x) = \frac{1}{8} \cdot x \cdot (x^2 - 4) \cdot (4 - x^2)$.
   (a) Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten der Funktion.
   (b) Geben Sie die Nullstellen der Funktion und deren Art an.
   (c) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$.
   (d) Zeigen Sie dass $f(x)$ bei $x_1 = -2$ und bei $x_2 = 2$ lokale Extremstellen besitzt. Geben Sie deren Art an.
   (e) Untersuchen Sie ob es neben x_1 und x_2 noch weitere Extrema gibt. Geben Sie evtl. deren Art an.
   (f) Bestimmen Sie die Wendepunkte der Funktion.
2. Gegeben sei die Funktion $x \mapsto f(x) = -\frac{1}{8} \cdot (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 15)$.
   (a) Zeigen Sie dass $f(x)$ nur die Nullstellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$ hat.
   (b) Bestätigen Sie: $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x+1)^3$.
   (c) Bestimmen Sie ausschließlich mit der 1. Ableitung die Art des Punktes mit waagrechter Tangengte.
   (d) Zeigen Sie, dass G_f keinen Wendepunkt besitzt.
   (e) Weisen Sie nach, dass für alle $x \in \mathbf{R}$ gilt: $f(-1+x) = f(-1-x)$. Welche Eigenschaft des Graphen wird damit bewiesen?
   (f) Zeichnen Sie die Graphen der Funktion, der ersten und der zweiten Ableitung in ein kartesisches Koordinatensystem.
3. Durch $f(x) = \frac{1}{36}x^4 - \frac{8}{27}x^3 + cx^2 + 4$ ist eine Funktionenschar f_c gegeben.
   (a) Zeigen Sie dass alle Graphen von f_c den Punkt $P(0|4)$ beinhalten.
   (b) Weisen Sie nach dass alle Graphen der Schar im Punkt $P(0|4)$ eine waagrechte Tangente haben.
   (c) Untersuchen Sie in Abhängigkeit vom Parameter c von welcher Art der Punkt $P(0|4)$ jeweils ist.
   (d) Zeigen Sie dass die folgenden vier Forderungen jede für sich den Parameterwert $c = \frac{2}{3}$ liefern:
      i. G_f soll bei $x = 6$ einen Schnittpunkt mit der x-Achse haben.
      ii. G_f soll bei $x = 6$ eine waagrechte Tangente haben.
      iii. G_f soll bei $x = 2$ eine waagrechte Tangente haben.
      iv. G_f soll bei $x = 3$ die Steigung -1 haben.
   (e) Geben Sie die Koordinaten aller Punkte mit waagrechten Tangenten für den Graphen zum Parameterwert $c = \frac{2}{3}$ an und bestimmen Sie die Art der Punkte.
   (f) Skizzieren Sie den Graphen G_f in ein kartesisches Koordinatensystem.

Lösung (Teil 4):

1. (a) Funktion ausmultipliziert:

$$f(x) = -\frac{1}{8} \cdot (x^5 - 8x^3 + 16x)$$

Die Funktion hat nur ungerade Exponenten
$\rightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung.

(b) Funktion in Faktoren zerlegt:

$$f(x) = -\frac{1}{8} \cdot x \cdot (x-2)^2 \cdot (x+2)^2$$

Eine einfache Nullstelle bei $x_0 = 0$ ($\rightarrow$ Vorzeichenwechsel).
Zwei doppelte Nullstellen bei $x_1 = -2$ und bei $x_2 = 2$ ($\rightarrow$ Berührpunkte).

(c) Für $x \rightarrow +\infty$: $f(x) \rightarrow -\infty$
Für $x \rightarrow -\infty$: $f(x) \rightarrow +\infty$

(d) $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ in $f'(x)$ einsetzen und überprüfen ob Ergebnis Null ist.

$$f'(x) = -\frac{1}{8} \cdot (5x^4 - 24x^2 + 16)$$

$$\begin{aligned} f'(-2) &= -\frac{1}{8} \cdot (5 \cdot (-2)^4 - 24 \cdot (-2)^2 + 16) \\ &= -\frac{1}{8} \cdot (80 - 96 + 16) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= -\frac{1}{8} \cdot (5 \cdot (2)^4 - 24 \cdot (2)^2 + 16) \\ &= -\frac{1}{8} \cdot (80 - 96 + 16) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Ableitung bestimmen:

$$f''(x) = -\frac{1}{8} \cdot (20x^3 - 48x)$$

$$\begin{aligned} f''(-2) &= -\frac{1}{8} \cdot (20 \cdot (-2)^3 - 48 \cdot (-2)) \\ &= -\frac{1}{8} \cdot (-160 + 96) \\ &= 8 \quad \rightarrow f''(-2) > 0 \quad \rightarrow \text{Linkskrümmung} \quad \rightarrow \text{TP}_1(-2|0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(2) &= -\frac{1}{8} \cdot (20 \cdot 2^3 - 48 \cdot 2) \\ &= -\frac{1}{8} \cdot (160 - 96) \\ &= -8 \quad \rightarrow f''(2) < 0 \quad \rightarrow \text{Rechtskrümmung} \quad \rightarrow \text{HP}_1(2|0) \end{aligned}$$

(e) Polynomdivision (1. Ableitung durch die bekannten Nullstellen):

$$\begin{aligned}(-\frac{5}{8}x^4+3x^2-2):(x+2) &= -\frac{5}{8}x^3+\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{2}x-1\\ (-\frac{5}{8}x^3+\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{2}x-1):(x-2) &= -\frac{5}{8}x^2+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Restliche Nullstellen bestimmen:

$$\begin{aligned}-\frac{5}{8}x^2+\frac{1}{2} &= 0\\ x_{3/4} &= \frac{0\pm\sqrt{0^2-4\cdot(-\frac{5}{8})\cdot\frac{1}{2}}}{2\cdot(-\frac{5}{8})}\\ &= \pm\frac{2}{5}\sqrt{5}\end{aligned}$$

x-Werte der Extremstellen in 2.Ableitung einsetzen:

$$\begin{aligned}f''(-\frac{2}{5}\sqrt{5}) &= -\frac{1}{8}\cdot(20\cdot(-\frac{2}{5}\sqrt{5})^3-48\cdot(-\frac{2}{5}\sqrt{5}))\\ &\approx -3,58 \qquad \rightarrow f''(-\frac{2}{5}\sqrt{5})<0 \qquad \rightarrow \mathrm{HP}_2\left(-\frac{2}{5}\sqrt{5}\middle|\frac{64}{125}\sqrt{5}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''(\frac{2}{5}\sqrt{5}) &= -\frac{1}{8}\cdot(20\cdot(\frac{2}{5}\sqrt{5})^3-48\cdot(\frac{2}{5}\sqrt{5}))\\ &\approx 3,58 \qquad \rightarrow f''(\frac{2}{5}\sqrt{5})>0 \qquad \rightarrow \mathrm{TP}_2\left(-\frac{2}{5}\sqrt{5}\middle|-\frac{64}{125}\sqrt{5}\right)\end{aligned}$$

(f) Nullstellen der zweiten Ableitung bestimmen:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{8}\cdot(20x^3-48x) &= 0\\ -\frac{1}{8}\cdot x\cdot(20x^2-48) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= 0\\ x_{2/3} &\approx \pm 1,55\end{aligned}$$

Mit dritter Ableitung überprüfen (diese muss $\neq 0$ sein):

$$f'''(x) = -\frac{1}{8}\cdot(60x^2-48)$$

$$\begin{aligned}f'''(0) &= 6 \qquad \checkmark\\ f'''(\pm 1,55) &\approx -12,02 \qquad \checkmark\end{aligned}$$

Wendepunkte:

$$\mathrm{WP}_1(-1,55|0,49) \qquad \mathrm{WP}_2(0|0) \qquad \mathrm{WP}_3(1,55|-0,49)$$

2. (a) Der Vorfaktor kann nicht zu Null werden, also müssen die Nullstellen in der Klammer stecken. Diese wird in ihre Linearfaktoren zerlegt:

$$(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 15) : (x + 3) = x^3 + x^2 + 3x - 5$$

$$(x^3 + x^2 + 3x - 5) : (x - 1) = x^2 + 2x + 5$$

Nun muss untersucht werden ob im dem restlichen Polynom noch weitere Nullstellen stecken:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 5 &= 0 \\ x_{1/2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} \end{aligned}$$

Diskriminante ist kleiner als Null. Damit gibt es keine weiteren Nullstellen! Die Funktion lautet in Linearfaktoren zerlegt:

$$f(x) = -\frac{1}{8} \cdot (x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 2x + 5)$$

(b) Gegebene Funktion ableiten:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{8} \cdot (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 15) \\ \to f'(x) &= -\frac{1}{8} \cdot (4x^3 + 12x^2 + 12x + 4) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \end{aligned}$$

Gegebene Ableitung ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2} \cdot (x + 1)^3 \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (x + 1) \cdot (x + 1)^2 \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 2x + 1) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \end{aligned}$$

Beide erste Ableitungen stimmen überein!

(c) Aus der gegebenen ersten Ableitung $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x + 1)^3$ kann man die Stelle mit der waagrechten Tangente sofort ablesen: Dreifache Nullstelle bei $x_0 = -1$.
Art des Extremums erhält man, indem das Vorzeichen der ersten Ableitung links und rechts der Nullstelle betrachtet wird.

$$\left.\begin{aligned} sgn[f'(-2)] &= 1 \\ sgn[f'(0)] &= -1 \end{aligned}\right\} \quad \to \text{HP bei } x_0 = -1 \qquad \to \qquad HP(-1|2)$$

(d) Bedingung für Wendepunkt(e) wäre:

$$f''(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad f'''(x) \neq 0$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -\frac{1}{2} \cdot (3x^2 + 6x + 3) \\
f''(x) &= 0 \\
3x^2 + 6x + 3 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= -3 \cdot (x+1) \\
f'''(-1) &= 0
\end{aligned}$$

Widerspruch zur Bedingung für Wendepunkt(e) $\rightarrow$ Es gibt keinen Wendepunkt.

(e) Die Werte $(-1+x)$ und $(-1-x)$ werden in die in Linearfaktoren zerlegte Funktion (siehe Teilaufgabe 2a) eingesetzt.

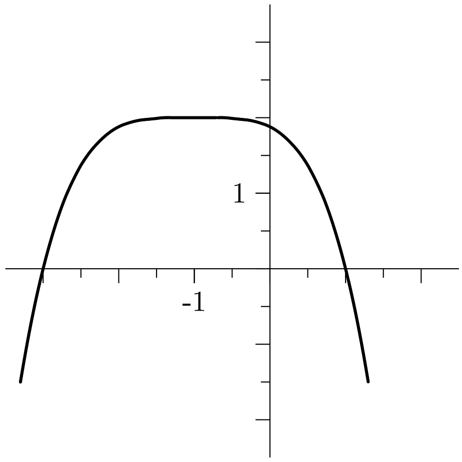
$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{8} \cdot (x+3) \cdot (x-1) \cdot (x^2 + 2x + 5) \\
f(-1+x) &= -\frac{1}{8} \cdot ([-1+x]+3) \cdot ([-1+x]-1) \cdot ([-1+x]^2 + 2[-1+x] + 5) \\
&= -\frac{1}{8} \cdot (x+2) \cdot (x-2) \cdot (x^2+4) \\
&= -\frac{1}{8} \cdot (x^2-4) \cdot (x^2+4) \\
&= -\frac{1}{8} \cdot (x^4 - 16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(-1-x) &= -\frac{1}{8} \cdot ([-1-x]+3) \cdot ([-1-x]-1) \cdot ([-1-x]^2 + 2[-1-x] + 5) \\
&= -\frac{1}{8} \cdot (2-x) \cdot (-x-2) \cdot (x^2+4) \\
&= -\frac{1}{8} \cdot (x^2-4) \cdot (x^2+4) \\
&= -\frac{1}{8} \cdot (x^4 - 16)
\end{aligned}$$

$$f(-1+x) = f(-1-x)$$

$\rightarrow$ Die Funktion ist achsensymmetrisch zu $x = -1$.

(f)



3. (a) Den gegebenen x-Wert $x = 0$ in den Funktionsterm einsetzen:

$$f(0) = \frac{1}{36} \cdot 0^4 - \frac{8}{27} \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + 4 = 4$$

Man erkennt, dass der Parameter c für $x = 0$ keine Auswirkung mehr hat, da $c \cdot 0$ stets den Wert Null hat. Somit gilt unabhängig von c: $f(0) = 4$.

(b) Erste Ableitung berechnen und zu Null setzen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{9}x^3 - \frac{8}{9}x^2 + 2c \cdot x \\ f'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Auch hier sieht man, dass der Parameter c für $x = 0$ keinen Einfluss auf den Funktionswert hat. Deshalb haben alle Graphen der Schar bei $x = 0$ eine waagrechte Tangente.

(c) Es kann sich nur um einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt handeln. Dies kann man anhand der 2. Ableitung unterscheiden.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{3}x^2 - \frac{16}{9}x + 2c \\ f''(0) &= 2c \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} \text{Für} & c < 0 & : & f''(0) < 0 \;\rightarrow \text{Hochpunkt} \\ \text{Für} & c = 0 & : & f''(0) = 0 \;\rightarrow \text{Terrassenpunkt} \\ \text{Für} & c > 0 & : & f''(0) > 0 \;\rightarrow \text{Tiefpunkt} \end{array}$$

(d) i. Forderung einer Nullstelle $P(6|0)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{36} \cdot 6^4 - \frac{8}{27} \cdot 6^3 + c \cdot 6^2 + 4 \\ 0 &= 36 - 64 + 36c + 4 \\ c &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ii. Waagerechte Tangente → 1. Ableitung ist Null:

$$\begin{aligned} f'(6) &= 0 \\ \frac{1}{9}\cdot 6^3 - \frac{8}{9}\cdot 6^2 + 2c\cdot 6 &= 0 \\ 24 - 32 + 12c &= 0 \\ c &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

iii. Waagerechte Tangente → 1. Ableitung ist Null:

$$\begin{aligned} f'(2) &= 0 \\ \frac{1}{9}\cdot 2^3 - \frac{8}{9}\cdot 2^2 + 2c\cdot 2 &= 0 \\ \frac{8}{9} - \frac{32}{9} + 4c &= 0 \\ c &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

iv. Steigung $m = -1$ → 1. Ableitung gleich -1:

$$\begin{aligned} f'(3) &= -1 \\ \frac{1}{9}\cdot 3^3 - \frac{8}{9}\cdot 3^2 + 2c\cdot 3 &= -1 \\ 3 - 8 + 6c &= -1 \\ c &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(e) Aus der Teilaufgabe (d) ist bereits bekannt dass es Extrema bei $x_1 = 6$ und $x_2 = 2$ gibt. Für die 2. Ableitung gilt:

$$\begin{aligned} f''(6) &= \frac{8}{3} \qquad > 0 \\ f''(2) &= -\frac{8}{9} \qquad < 0 \end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$\text{Tiefpunkt: } P_1(6|0) \qquad \text{Hochpunkt } P_2\left(2|\frac{128}{27}\right)$$

Untersuchung ob die 1. Ableitung noch mehr Nullstellen hat geschieht mit der Linearfaktorzerlegung:

$$\begin{aligned} (\frac{1}{9}x^3 - \frac{8}{9}x^2 + \frac{4}{3}x) : (x-6) &= \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x \\ (\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x) : (x-2) &= \frac{1}{9}x \end{aligned}$$

Damit lautet die erste Ableitung in Linearfaktoren zerlegt:

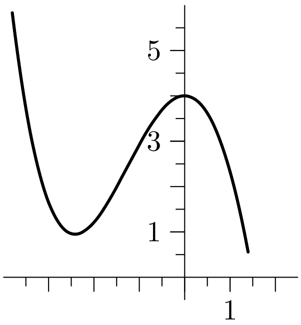
$$f'(x) = (x-6)\cdot(x-2)\cdot\frac{1}{9}x$$

Man erkennt sofort, dass es neben den Nullstellen $x_1 = 6$ und $x_2 = 2$ noch eine weitere Nullstelle $x_3 = 0$ gibt.
Da $f''(0) = \frac{4}{3}$ größer als Null ist gilt:

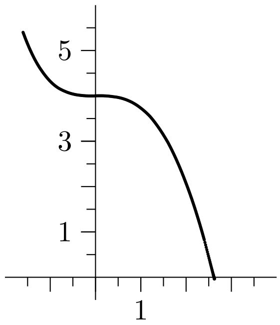
$$\text{Tiefpunkt } P_3(0|4)$$

(f) Da es sich bei der Funktion um eine Schar handelt und nicht vorgegeben ist für welchen Parameterwert der Graph gezeichnet werden soll müssen mehrere Graphen skizziert werden. Dies kann natürlich auch in ein Koordinatensystem erfolgen.

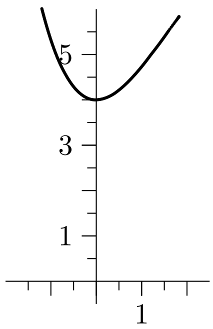
Parameter $c < 0$
(c=−1,4)



Parameter $c = 0$



Parameter $c > 0$
(c=1,0)



Parameter $c = \frac{2}{3}$