8 Lineare Gleichungssysteme

8.1 Begriffe

Allgemeine Form eines Gleichungssystems bestehend aus drei Gleichungen und drei Unbekannten:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

- Ein lineares Gleichungssystem besteht allgemein formuliert aus m Gleichungen und n Unbekannten.
  - Systeme, bei denen die Zahl der Gleichungen kleiner als die Zahl der Unbekannten sind ($m < n$) heißen **unterbestimmt**.
  - Systeme mit einer größeren Anzahl Gleichungen als Unbekannten ($m > n$) nennt man **überbestimmt**.
- Bei Gleichungssystemen werden die **Unbekannten** üblicherweise anstelle von x, y, z, ... mit $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$, ... bezeichnet, um die Ausbaufähigkeit der Lösungsverfahren auf beliebig große Systeme ausdehnen zu können.
- Die **Gesamtheit aller Unbekannten** x_1, x_2, x_3, ... eines Gleichungssystems wird als **eine Variable** angesehen.
  D. h. ein Lösungselement eines Gleichungssystems mit drei Unbekannten beinhaltet stets eine x_1- und eine x_2- und eine x_3-Komponente.
- Die Faktoren $\mathbf{a_{11}}$, $\mathbf{a_{12}}$, $\mathbf{a_{13}}$, $\mathbf{a_{21}}$, ... vor den Unbekannten sind **Konstanten mit Doppelindizes**.
  Der Doppelindex gibt Auskunft über die Stellung der Konstanten a im Gleichungssystem. So steht die Zahl a_{32} in der dritten Gleichung bei der zweiten Unbekannten als Koeffizient.
- Für die vereinfachte Darstellung von linearen Gleichungssystemen gibt es zwei Möglichkeiten:
  - Es wird nur die linke Seite des Gleichungssystems in einer **Koeffizientenmatrix** erfasst:
    $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
  - Das gesamte Gleichungssystem wird in einer **erweiterten Koeffizientenmatrix** dargestellt (nur aus ihr kann man das Gleichungssystem auch wieder in der ausführlichen Form erstellen):
    $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

8.2 Lösungsverfahren für Systeme aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten

8.2.1 Einsetzverfahren

Die erste Gleichung wird nach einer der beiden Unbekannten (z. B. x_1) aufgelöst. Der damit erhaltene Term wird in der zweiten Gleichung für diese Unbekannte eingesetzt.

Beispiel:
Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcl} (I) & 8x_1 + 2x_2 & = & 80 \\ (II) & -3x_1 + 5x_2 & = & -7 \end{array}$$

Gleichung (I) nach einer Unbekannten (hier z. B. x_2) auflösen:

$$x_2 = 40 - 4x_1 \qquad \clubsuit$$

Diesen Ausdruck in (II) einsetzen:

$$-3x_1 + 5 \cdot (40 - 4x_1) = -7$$

Der Term muss nur noch ausmultipliziert und nach x_1 aufgelöst werden:

$$\begin{array}{rcl} -3x_1 + 200 - 20x_1 & = & -7 \\ -23x_1 & = & -207 \\ x_1 & = & 9 \end{array}$$

Den Wert von x_1 in $\clubsuit$ einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & 40 - 4 \cdot 9 \\ x_2 & = & 4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{(9,4)\}}}$$

8.2.2 Gleichsetzungsverfahren

Beide Gleichungen werden nach derselben Unbekannten aufgelöst und die rechten Seiten der aufgelösten Gleichungen werden gleichgesetzt.

Beispiel:
Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcl} (I) & 12x_1 - 8x_2 & = & 56 \\ (II) & 2x_1 + 11x_2 & = & -3 \end{array}$$

Beide Gleichungen nach einer Unbekannten (hier z. B. x_1) auflösen:

$$\begin{array}{lrcl} \text{aus } (I): & x_1 & = & \frac{14}{3} + \frac{2}{3}x_2 \\ \text{aus } (II): & x_1 & = & -\frac{3}{2} - \frac{11}{2}x_2 \end{array}$$

Beide Terme gleichsetzten und nach x_2 auflösen:

$$\begin{aligned}
\frac{14}{3}+\frac{2}{3}x_2 &= -\frac{3}{2}-\frac{11}{2}x_2 \\
\left(\frac{8}{12}+\frac{11}{2}\right)x_2 &= -\frac{3}{2}-\frac{56}{12} \\
74x_2 &= -74 \\
x_2 &= -1
\end{aligned}$$

Wert von x_2 in einen der obigen Ausdrücke für x_1 einsetzen:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{14}{3}+\frac{2}{3}\cdot(-1) \\
x_1 &= 4
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L}=\{(4,-1)\}}}$$

8.2.3 Additionsverfahren

Der Grundgedanke dieses Verfahrens ist, dass die Summer zweier Gleichungen mit den Lösungen (x_1, x_2) ebenfalls diese Lösung haben muss. Deshalb wird versucht die beiden Gleichungen derart zu addieren, dass dabei eine Unbekannte wegfällt (man sagt auch: eine Unbekannte wird *eliminiert*).

Die nachfolgenden drei Beispiele demonstrieren, dass ein Gleichungssystem genau eine, keine oder auch unendlich viele Lösungen haben kann. In den beiden letzten Fällen spricht man auch von einem **zerfallenden System**, welches entsteht, wenn nur die linken Seiten bzw. die gesamten Gleichungen Vielfache voneinander sind.

Beispiel 1:
Gesucht sei die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{llcl}
(I) & 6x_1+3x_2 & = & 147 \\
(II) & 3x_1+2x_2 & = & 96
\end{array}$$

Nun muss überlegt werden welche Vielfachen der beiden Zeilen addiert werden müssen damit eine Unbekannte eliminiert wird. Hier gibt es mehrere Möglichkeiten:

- Elimination von x_1: $(I)+(-2)\cdot(II)$ oder $(-0,5)\cdot(I)+(II)$
- Elimination von x_2: $(I)+(-1,5)\cdot(II)$ oder $(-\frac{2}{3})\cdot(I)+(II)$

Hier werde die erste Möglichkeit $(I)+(-2)\cdot(II)$ zur Elimination von x_1 gewählt:

$$\begin{array}{lrcl}
(I) & 6x_1+3x_2 & = & 147 \\
(-2)\cdot(II) & -6x_1-4x_2 & = & -192 \\
\hline
 & -x_2 & = & -45 \\
 & \Rightarrow \quad x_2 & = & 45
\end{array}$$

Der Wert von x_2 kann nun in eine der beiden gegebenen Gleichungen eingesetzt werden (hier in (I)). Diese muss anschließend nach x_1 aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} 6x_1 + 3 \cdot 45 &= 147 \\ x_1 &= 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{(2, 45)\}}}$$

Beispiel 2:
Gesucht sei die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{lrcl} (I) & x_1 - 4x_2 & = & 9 \\ (II) & -2x_1 + 8x_2 & = & 7 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lrcl} 2 \cdot (I) & 2x_1 - 8x_2 & = & 18 \\ (II) & -2x_1 + 8x_2 & = & 7 \\ \hline & 0 & = & 25 \end{array}$$

Man erhält einen Widerspruch. Damit hat das Gleichungssystem keine Lösung!

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{ \ \}}}$$

Beispiel 3:
Gesucht sei die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{lrcl} (I) & -4x_1 + 12x_2 & = & -2 \\ (II) & 6x_1 - 18x_2 & = & 3 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lrcl} 1,5 \cdot (I) & -6x_1 + 18x_2 & = & -3 \\ (II) & 6x_1 - 18x_2 & = & 3 \\ \hline & 0 & = & 0 \end{array}$$

Man bekommt eine wahre Aussage. Das System ist unterbestimmt und man bekommt unendlich viele Lösungen, wobei der Wert der einen Variablen stets von der anderen abhängt. Z. B. aus Gleichung (I):

$$x_2 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3}x_1$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \left\{ (x_1, x_2) \,|\, x_1 \in \mathbf{R} \wedge x_2 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3}x_1 \right\}}}$$

8.2.4 Graphische Lösung

Jede Gleichung des Systems wird als eine Gleichung einer linearen Funktion angesehen. Damit ist der Graph einer jeden Funktion eine Gerade. Der Schnittpunkt dieser Geraden ist die gesuchte Lösung. Existiert kein Schnittpunkt, so ist die Lösungsmenge eine leere Menge. Liegen die beiden Geraden aufeinander, so gibt es unendlich viele Lösungen.

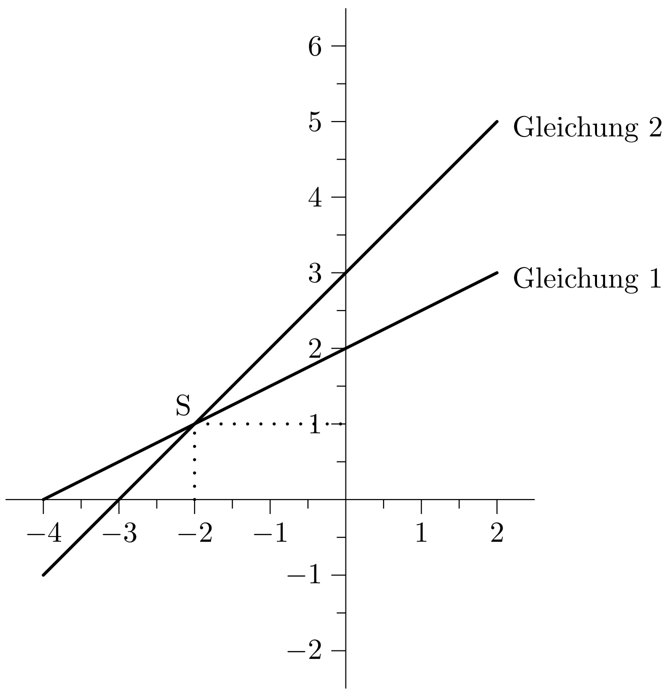
Beispiel:
Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcl} (I) & 5x_1 - 10x_2 & = & -20 \\ (II) & -6x_1 + 6x_2 & = & 18 \end{array}$$

Beide Gleichungen nach x_2 umstellen:

$$\begin{array}{lrcl} (I) & x_2 & = & 0,5x_1 + 2 \\ (II) & x_2 & = & x_1 + 3 \end{array}$$

Die Graphen beider Gleichungen in ein x_1x_2-Koordinatensystem eintragen und die Koordinaten des Schnittpunktes ablesen:



Der Schnittpunkt liegt bei $S(-2|1)$.

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{(-2,1)\}}}$$

Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die Lösungsmengen nachfolgender linearer Gleichungssysteme. Variieren Sie bei den Aufgaben das Lösungsverfahren.

a) $x_1 + x_2 = 5$
$4x_1 - 3x_2 = -1$

b) $5x + 6y = 1$
$-8x + 5y = 1$

c) $6x_1 + x_2 + 9 = 0$
$7x_1 - 4x_2 + 26 = 0$

d) $2a + 4b - 3 = 0$
$-6a + 10b = 2$

e) $26x_1 - 9x_2 = 82$
$39x_1 - \frac{27}{2}x_2 = 71$

f) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = \frac{3}{4}$
$2x + 3y = 9$

g) $3x_1 - 4x_2 - 19 = 0$
$5x_1 - 37 = 12x_2$

h) $x_1 + x_2 = 78$
$-3x_1 - 3x_2 = -234$

i) $x_1 - x_2 = -\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}x_1 - x_2 = -2$

j) $8x - 2y = -14$
$7x + \frac{3}{7}y = 9$

Lösungen:

a) $\mathbf{L} = \{(2,3)\}$

b) $\mathbf{L} = \left\{\left(-\frac{1}{73}, \frac{13}{73}\right)\right\}$

c) $\mathbf{L} = \{(-2,3)\}$

d) $\mathbf{L} = \left\{\left(\frac{1}{22}, \frac{5}{22}\right)\right\}$

e) $\mathbf{L} = \{\ \}$

f) $\mathbf{L} = \{(0,3)\}$

g) $\mathbf{L} = \{(5,-1)\}$

h) $\mathbf{L} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbf{R} \wedge x_2 = 78 - x_1\}$

i) $\mathbf{L} = \left\{\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$

j) $\mathbf{L} = \left\{\left(\frac{42}{61}, \frac{595}{61}\right)\right\}$

8.3 Lösungsverfahren für Systeme aus m Gleichungen mit n Unbekannten

8.3.1 Reduktion eines 3-3- auf ein 2-2-System

Ist mindestens ein Koeffizient des Gleichungssystems Null, so kann die Gleichung mit diesem „Null“-Koeffizienten nach einer der beiden anderen Unbekannten aufgelöst, und das Ergebnis in die beiden restlichen Gleichungen eingesetzt werden.
Dieses 2-2-System kann nun mit den in Kapitel 8.2 vorgestellten Verfahren gelöst werden.

Beispiel:
Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcl} (I) & 8x_1 \qquad - 2x_3 & = & -30 \\ (II) & 2x_1 + 5x_2 + 11x_3 & = & -9 \\ (III) & -x_1 + 3x_2 - 6x_3 & = & 16 \end{array}$$

Gleichung (I) nach x_3 auflösen:

$$x_3 = 4x_1 + 15 \qquad \clubsuit$$

Diesen Ausdruck in die Gleichungen (I) und (II) einsetzen:

$$\begin{array}{lrcll} \text{in } (II) & 2x_1 + 5x_2 + 11 \cdot (4x_1 + 15) & = & -9 & \\ & 46x_1 + 5x_2 & = & -174 & \bigstar \\ & & & & \\ \text{in } (III) & -x_1 + 3x_2 - 6 \cdot (4x_1 + 15) & = & 16 & \\ & -25x_1 + 3x_2 & = & 106 & \blacklozenge \end{array}$$

Die beiden Gleichungen $\bigstar$ und $\blacklozenge$ bilden nun ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und den beiden Unbekannten x_1 und x_2. Dies kann nun z. B. mit dem Additionsverfahren gelöst werden.

$$\begin{array}{lrcl} 3 \cdot \bigstar & 138x_1 + 15x_2 & = & -522 \\ (-5) \cdot \blacklozenge & 125x_1 - 15x_2 & = & -530 \\ \hline & 263x_1 & = & -1052 \\ & \Rightarrow \quad x_1 & = & -4 \end{array}$$

Der Wert von x_1 kann nun in $\bigstar$ oder $\blacklozenge$ eingesetzt werden (hier in $\blacklozenge$) um x_2 zu berechnen, und anschließend noch in $\clubsuit$ um x_3 zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcl} -25 \cdot (-4) + 3x_2 & = & 106 \\ x_2 & = & 2 \\ & & \\ x_3 & = & 4 \cdot (-4) + 15 \\ x_3 & = & -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{(-4, 2, -1)\}}}$$

8.3.2 Determinantenmethode

Berechnung zweireihiger Determinanten

Zu lösen sei ein 2-2-Gleichungssystem der Art:

$$\begin{array}{llcl} (I) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ (II) & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array}$$

Dazu wird zunächst die Unbekannte x_1 mit dem Additionsverfahren (siehe Seite 156) eliminiert:

$$\begin{array}{lrcll} (-a_{21}) \cdot (I): & -a_{21}a_{11}x_1 - a_{12}a_{21}x_2 & = & -a_{21}b_1 & \\ a_{11} \cdot (II): & a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 & = & a_{11}b_2 & \\ \hline \sum & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 & = & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 & \spadesuit \end{array}$$

Nun wird - ausgehend von den gegebenen Gleichungen - die Unbekannte x_2 eliminiert:

$$\begin{array}{lrcll} a_{22} \cdot (I): & a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 & = & a_{22}b_1 & \\ (-a_{12}) \cdot (II): & -a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 & = & -a_{12}b_2 & \\ \hline \sum & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 & = & a_{22}b_1 - a_{12}b_2 & \diamondsuit \end{array}$$

Damit kann das gegebene Gleichungssystem durch das folgende, äquivalente System ersetzt werden:

$$\begin{array}{llcl} (I^*) & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 & = & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \\ (II^*) & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 & = & a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \end{array}$$

Um das Berechnen dieser Ausdrücke etwas übersichtlicher zu gestalten werden abkürzende Schreibweisen, die zweireihigen Determinanten, eingeführt. Dazu werden die Koeffizienten a_{11}, a_{12}, a_{21} und a_{22} in einem quadratischen Zahlenschema angeordnet.

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = D$$

In diesem Schema unterscheidet man zwei Diagonalen:

- die Hauptdiagonale wird durch die Zahlen a_{11} und a_{22} gebildet und verläuft von links oben nach rechts unten
- die Nebendiagonale beinhaltet die Zahlen a_{12} und a_{21} und geht von links unten nach rechts oben.

Ersetzt man in D die Zahlen der „x_1-Spalte“ durch die rechte Seite des ursprünglich gegebenen Gleichungssystems (also durch b_1 und b_2) so erhält man die Determinante D_1. Entsprechend erhält man D_2 durch Austausch der „x_2-Spalte“.

$$b_1 a_{22} - b_2 a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = D_1$$

$$b_2 a_{11} - b_1 a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = D_2$$

Damit kann das äquivalente Gleichungssystem bestehend aus $(I)^*$ und $(II)^*$ in folgende Kurzform umgeschrieben werden, aus der sich x_1 und x_2 leicht bestimmen lassen:

$$\begin{array}{ccc} Dx_1 = D_1 & & x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ & \Rightarrow & \\ Dx_2 = D_2 & & x_2 = \dfrac{D_2}{D} \end{array}$$

Cramersche Regeln für ein 2-2-Gleichungssystem:

1. Fall: $\mathbf{D \neq 0}$
   Das System ist **eindeutig lösbar**, da dann der Nenner obiger Gleichungen stets ungleich Null ist.

2. Fall: $\mathbf{D = 0 \wedge D_1 = 0 \wedge D_2 = 0}$
   Das System hat **unendlich viele Lösungen**, da die Gleichungen $0 \cdot x_1 = 0$ und $0 \cdot x_2 = 0$ für alle reellen x_1 und x_2 erfüllt sind.

3. Fall: $\mathbf{D = 0 \wedge (D_1 \neq 0 \vee D_2 \neq 0)}$
   Das System hat **keine Lösung**, da es keine reelle Zahl gibt, welche die Bedingung $0 \cdot x_1 \neq 0$ bzw. $0 \cdot x_2 \neq 0$ erfüllt.

Berechnung dreireihiger Determinanten

Dieses Verfahren kann ohne Probleme auch auf größere Gleichungssysteme ausgedehnt werden. Die Berechnung der Determinanten erfolgt dann mit Hilfe der Regel von Sarrus (siehe Seite 163) oder durch Entwicklung nach der ersten Spalte (siehe Seite 164).

Für 3-3-Gleichungssysteme gilt:
Das Gleichungssystem hat dann, und nur dann genau eine Lösung
$\mathbf{L} = (x_1, x_2, x_3)$, wenn

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Dann lassen sich die Unbekannten folgendermaßen berechnen:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

Hinweis:
3-3-Systeme lassen sich nur dann eindeutig lösen falls $D \neq 0$. in allen anderen Fällen wird empfohlen die Lösungsmenge mit dem Gaußschen Algorithmus (siehe Seite 165) zu ermitteln!

Betrag einer Matrix mit der „Regel von Sarrus“

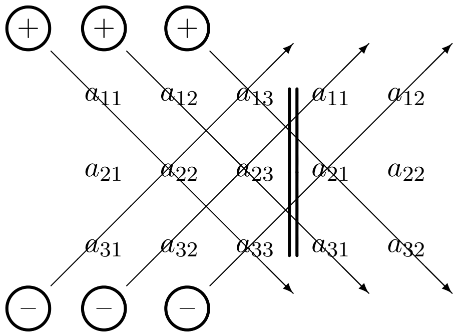
Die Regel von Sarrus gilt nur für dreireihige Determinanten!

Berechnet man bei der Entwicklung nach der ersten Zeile auch noch die Unterdeterminanten, so erhält man (am Ende durch Vertauschen der Reihenfolge einiger Summanden und Faktoren) folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

Zu diesem Ergebnis kommt man auch unmittelbar wenn man die erste und zweite Spalte noch einmal neben die Determinante schreibt (sozusagen als Hilfsspalten). Nun addiert man die Produkte der drei Hauptdiagonalen und subtrahiert davon die Summe der Produkte der in den drei Nebendiagonalen stehenden

Elemente.



Beispiel:
Zu bestimmen sei die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Man erweitert die Matrix um die „Hilfsspalten“:

$$\begin{array}{ccc||cc} 10 & 8 & 6 & 10 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 9 & 3 & 2 \end{array}$$

Nun wird die Summe der Produkte der drei Hauptdiagonalen berechnet und davon die Summe der Produkte der drei Nebendiagonalen abgezogen:

$$\begin{aligned} D &= \underbrace{[(10\cdot 5\cdot 9)+(8\cdot 1\cdot 3)+(6\cdot 3\cdot 2)]}_{\text{aus Hauptdiagonalen}} - \underbrace{[(3\cdot 5\cdot 6)+(2\cdot 1\cdot 10)+(9\cdot 3\cdot 8)]}_{\text{aus Nebendiagonalen}} \\ &= [450+24+36]-[90+20+216] \\ &= 184 \end{aligned}$$

Betrag einer Matrix durch Entwicklung nach der ersten Spalte

Im Gegensatz zur Regel von Sarrus kann dieses Verfahren (durch rekursives Anwenden) für beliebig große Determinanten verwendet werden. Allerdings wächst der dafür benötigte Rechenaufwand sehr schnell an.

Um den Betrag einer Determinante zu berechnen nehme man der Reihe nach die Koeffizienten der ersten Spalte. Man beginnt mit dem obersten, schreibt ihn an und streicht dann (gedanklich) die zugehörige Zeile und die Spalte aus der Determinante. Übrig bleibt eine Unterdeterminante mit n-1 Spalten und m-1 Zeilen, deren Betrag man mit dem bereits angeschriebenen Koeffizienten multipliziert.
Im nächsten Schritt schreibt man den zweiten Koeffizienten von oben der ersten Spalte an, streicht wieder die zugehörige Zeile und Spalte und multipliziert den Betrag der übrig gebliebenen Unterdeterminante mit dem angeschriebenen

Koeffizienten. Dieses Produkt wird vom ersten Produkt abgezogen.
Im Laufe der weiteren Berechnung werden die folgenden Produkte abwechselnd addiert und subtrahiert.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$D = a_{11} \cdot U_{11} - a_{21} \cdot U_{21} + a_{31} \cdot U_{31}$$

Beispiel:
Zu bestimmen sei die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} D &= 10 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 10 \cdot (5 \cdot 9 - 2 \cdot 1) - 3 \cdot (8 \cdot 9 - 2 \cdot 6) + 3 \cdot (8 \cdot 1 - 5 \cdot 6) \\ &= 10 \cdot 43 - 3 \cdot 60 + 3 \cdot (-22) \\ &= 184 \end{aligned}$$

8.3.3 Gaußsches Eliminationsverfahren

Beim diesem Verfahren wird nur mit der erweiterten Koeffizientenmatrix (siehe Seite 154) des Gleichungssystems gearbeitet.

Ziel ist es, die erweiterte Koeffizientenmatrix so umzuformen, dass man eine obere Dreiecksmatrix erhält. Bei einem 3-3-System hätte diese folgende Form ($*$ steht für beliebige Zahlen):

$$\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}$$

Um dies zu erreichen sind folgende Rechenoperationen erlaubt:

- Vertauschung zweier Zeilen
- Addition eines geeigneten Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile
- Multiplikation einer (kompletten) Zeile mit einer von Null verschiedenen Zahl

<u>Beispiel:</u>
Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gaußschen Lösungsverfahrens:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & -x_2 & & = & -8 \\ 2x_1 & & -2x_3 & = & -12 \\ & x_2 & +x_3 & = & 24 \end{array}$$

Aufstellen der erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 2 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & 24 \end{array}\right.$$

Es ergibt sich folgender Rechenweg:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 2 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & 24 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c}\text{(II) und (III) tauschen} \\ \Rightarrow \end{array} \quad \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 24 \\ 2 & 0 & -2 & -12 \end{array}\right. \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c}(-2)\cdot(I)+(III) \\ \Rightarrow \end{array} \quad \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c}(-2)\cdot(II)+(III) \\ \Rightarrow \end{array} \quad \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & -4 & -44 \end{array}\right.$$

Von unten nach oben auflösen:

$$\begin{array}{lrclcl} \text{Zeile 3:} & -4\cdot x_3 = -44 & \rightarrow & & & x_3 = 11 \\ \text{Zeile 2:} & 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = 24 & \rightarrow & 1\cdot x_2 + 1\cdot 11 = 24 & \rightarrow & x_2 = 13 \\ \text{Zeile 1:} & 1\cdot x_1 - 1\cdot x_2 = -8 & \rightarrow & 1\cdot x_1 - 1\cdot 13 = -8 & \rightarrow & x_1 = 5 \end{array}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{(5, 13, 11)\}}}$$

8.4 Übungsaufgaben

1. Geben Sie mindestens vier Lösungen nachfolgender Gleichung an!

$$5x - y = -1 \qquad x \in R; \qquad y \in R$$

2. Geben Sie zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen an, die das Zahlenpaar [2; 3] als eine Lösung haben!

3. Skizzieren Sie in einem Koordinatensystem ein lineares Gleichungssystem, das keine Lösung hat!

4. Woran erkennt man an den Koeffizienten, dass ein 2-2-Gleichungssystem genau eine Lösung besitzt?

5. Lösen Sie das nachfolgende Gleichungssystem graphisch!

$$\begin{array}{rcrcr} y & = & x & + & 1 \\ y & = & 2x & + & 1 \end{array}$$

6. Lösen Sie das Gleichungssystem rechnerisch!

$$\begin{array}{rcrl} x & + & y & = 2 \\ 2x & + & 2y & = 7 \end{array}$$

7. Gesucht ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & -1 \\ 5x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 1 \end{array}$$

8. Bestimmen Sie den Parameter a so, dass das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist:

$$\begin{array}{rrrcr} 5x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & +ax_2 & +\frac{3}{2}x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = & 2 \end{array}$$

9. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem, wobei m eine feste reelle Zahl sei:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & mx_3 & = & -1 \\ 4x_1 & + & 9x_2 & + & m^2x_3 & = & 1 \end{array}$$

   (a) Für welche Werte von m hat das System keine eindeutige Lösung?

   (b) Setzen Sie $m = 4$ und lösen Sie das erhaltene System mit der Determinatenmethode.

   (c) Lösen Sie das System für $m = -1$ mit dem Gaußschen Algorithmus.

   (d) Für welche Werte von m gilt $D = 6$?

10. Die Differenz zweier Zahlen beträgt 27. Multipliziert man die erste Zahl mit 2 und die zweite Zahl mit 3, so ist die Differenz 41. Bestimmen Sie die Zahlen.

11. Ein Textilgeschäft bezieht 200 Hemden und 250 Pullover, die laut Rechnung zusammen 24.500 Euro kosten. Die Hemden werden mit 20%, die Pullover mit 40% Aufschlag verkauft. Dabei werden insgesamt 31.900 Euro eingenommen. Wie teuer war ein Hemd und ein Pullover im Einkauf?

12. Für den Bau eines Hauses benötigt eine Familie einen Zwischenfinanzierungskredit von 120.000 Euro. Sie erhält ihn von drei verschiedenen Banken B_1, B_2 und B_3 zu jeweils 5%, 10% und 8% Zinsen.
    Nach einem Jahr entrichtet sie insgesamt an die drei Banken 8.000 Euro Zinsen. Im zweiten Jahr erhöht B_1 den Zinssatz um 1% und B_2 um 0,5%, während B_3 den alten Zinssatz beibehält. Am Ende des zweiten Jahres sind insgesamt 8.650 Euro Zinsen fällig. (Hinweis: während der betrachteten Laufzeit erfolgt keine Tilgung!)
    Welche Beträge wurden von den drei Banken ausgeliehen?

Lösungen

1. Angabe umstellen ($y = 5x + 1$) und beliebige x-Werte einsetzten.
2. Allgemein: $y = mx + t \quad \rightarrow \quad 3 = m \cdot 2 + t$. Nun entweder m oder t frei wählen und anderen Parameter entsprechend bestimmen.
3. Es handelt sich um zwei beliebige parallele Geraden.
4. Die zwei Zeilen sind keine Vielfachen voneinander.
5. Zwei Geraden im Koordinatensystem mit Schnittpunkt $S(0|1)$.
6. Das Gleichungssystem hat keine Lösung!
7. Die Determinante des Systems kann auf zwei Arten berechnet werden:

   (a) Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} D &= \left|\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{array}\right\|\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{array} \\ &= [2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot (-1)] - [5 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3] \\ &= 9 \end{aligned}$$

   (b) Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$\begin{aligned} D &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1) - 1 \cdot (3 \cdot 2 - (-1) \cdot 1) + 5 \cdot (3 \cdot 1 - 1 \cdot 1) \\ &= 9 \end{aligned}$$

   Da $D \neq 0$ ist hat das System eine eindeutige Lösung.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 9 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{9}{9} = 1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{9} = 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -18 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-18}{9} = -2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{L} = \{(1, 0, -2)\}}}$$

8. Bestimmung der Determinante des gegebenen Systems:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & a & \frac{3}{2} \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 5 \cdot a \cdot (-2) + (-1) \cdot \frac{3}{2} \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \cdot (-2) - (-2) \cdot a \cdot 2 - (-2) \cdot \frac{3}{2} \cdot 5 - (-2) \cdot 3 \cdot (-1) \\ &= -6a \end{aligned}$$

   Es muss gelten:

$$D \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad a \neq 0$$

9. (a) Keine Lösung falls Determinante $D = 0$ d. h. für $m_1 = 2$ und $m_2 = 3$.
   (b) $x_1 = 10 \qquad x_2 = -15 \qquad x_3 = 6$
   (c) $x_1 = 0 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 1$
   (d) $m_1 = 0 \qquad m_2 = 5$

10. Erste Zahl $a = 40$ und zweite Zahl $b = 13$.

11. Ein Hemd kostet 60 Euro und ein Pullover kostet 50 Euro im Einkauf.

12. Bank 1 verleiht 60.000 Euro, von Bank 2 stammen 10.000 Euro und Bank 3 vergab einen Kredit über 50.000 Euro. ($D = -0,00035$, $D_1 = -21$, $D_2 = -3,5$, $D_3 = -17,5$)

Index